**Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema 1**

07 giugno 2019

| COGNOME: | NOME: | MATR.: |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Determinare al variare del parametro reale $\beta$ il comportamento delle due serie

$$(a)\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{\beta\ln(n)}; \quad (b)\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\arctan\left(\frac{\beta}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)\right).$$

**Soluzione.**

$(a)$ Si nota subito che se $\beta \geq 0$ il termine della serie non va a 0 per cui la serie diverge. Visto che nel termine $a_n$ compaiono l'esponenziale di base 2 ed il logaritmo naturale in base $e$, posso riscrivere il termine $a_n$ come esponenziale in base $e$ ottenendo

$$2^{\beta\ln(n)} = e^{\ln(2^{\beta\ln(n)})} = e^{\beta\ln(n)\ln(2)} = \left(e^{\ln(n)}\right)^{\beta\ln(2)} = n^{\beta\ln(2)}.$$

Posto $\alpha = -\beta\ln(2)$ si ha che $a_n = 1/n^{\alpha}$ e la serie da studiare è una serie armonica. E' noto che essa converge se e solo se $\alpha > 1$, ossia $-\beta\ln(2) > 1$ ossia $\beta < -1/\ln(2)$.

$(b)$ Il termine $a_n$ tende a zero per qualsiasi valore di $\beta$, anche se per $\beta < 0$ non si può dire se la serie è a termini positivi. Si sviluppano quindi le funzioni $\arctan(t)$ e $\ln(1+t)$ in $t=0$ come $\arctan(t) = t + o(t^2)$, $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ e si ottiene che

$$a_n = \frac{\beta}{n} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) - \frac{3}{n} + \frac{9}{2n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) = \frac{\beta-3}{n} + \frac{9}{2n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

La serie in esame quindi è composta da una serie armonica divergente con fattore moltiplicativo $\beta - 3$ ed una serie convergente. Si deduce che la serie converge se e solo se $\beta = 3$, diverge a $+\infty$ se $\beta > 3$, a $-\infty$ se $\beta < 3$.

**Esercizio 2.** Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$(1+x^2)y'(x) + xy(x) = (1+x^2)^{-1}.$$

Stabilire poi se la soluzione tale che $y(0) = -1$ è una funzione limitata su $\mathbb{R}$ o meno.

**Soluzione.** Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine:

$$y'(x) = -\frac{x}{1+x^2}y(x) + \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

La soluzione $v$ dell'eq. omogenea associata è

$$-\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)+c \Rightarrow v(x) = c'e^{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)} = c'\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Rimane poi da fare l'integrale

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{-1} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx.$$

Questo integrale è espresso in potenza di $\sqrt{1+x^2}$ e si può fare con il cambio in seno iperbolico $x = \sinh(z)$, da cui $e^z = x + \sqrt{x^2+1}$ e

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx = \int \frac{1}{(\cosh(z))^2}\,dx = -\frac{2}{e^{2z}+1} + c = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + c.$$

Rimoltiplicando per l'omogenea si ottiene la formula generale

$$y(x) = \frac{c}{-} - \frac{x}{1+x^2}.$$

La soluzione tale che $y(0) = -1$ è quella con $c = -1$, ossia

$$y(x) = -\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{1+x^2}.$$

La funzione $y$ sopra è continua su tutto $\mathbb{R}$ ed ha limite zero a $\pm\infty$ per cui è una funzione limitata su $\mathbb{R}$. Si può fare anche l'ulteriore maggiorazione

$$|y(x)| = \frac{|\sqrt{1+x^2}+x|}{1+x^2} \le \frac{1+2|x|}{1+x^2} \le 2.$$

**Esercizio 3.** Data $f(x) = e^{-|x|}(x^2 + 2x)$, definita per $x \in \mathbb{R}$

(1) determinarne eventuali asintoti, massimi e minimi locali/assoluti;
(2) determinare le zone in cui $f$ è convessa;
(3) calcolarne l'integrale su $[-2, 1]$;
(4) determinare poi per quali $\beta \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = \beta$ ha soluzione.

**Soluzione.**

(1) La $f$ è continua su $\mathbb{R}$ e derivabile infinite volte su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e si ha

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}(x^2 + 2x) & x > 0 \\ e^{x}(x^2 + 2x) & x < 0 \end{cases}, \qquad f'(x) = \begin{cases} e^{-x}(2 - x^2) & x > 0 \\ e^{x}(x^2 + 4x + 2) & x < 0 \end{cases}.$$

In particolare, dato che $\lim_{x \to 0+} f'(x) = 2 = \lim_{x \to 0-} f'(x)$, $f$ è derivabile anche in $x = 0$ con derivata $f'(0) = 2$. Si calcola subito che $f'(x) = 0$ su $(0, +\infty)$ se e solo se $x = \sqrt{2}$ ed è positiva per $0 < x < \sqrt{2}$ e negativa per $x > \sqrt{2}$. Per quanto riguarda l'intervallo $(-\infty, 0)$, $f'(x) = 0$ se e solo se $x = -2 \pm \sqrt{2}$, ed è negativa per $-2 - \sqrt{2} < x < -2 + \sqrt{2}$ e positiva per $x < -2 - \sqrt{2}$ oppure per $-2 + \sqrt{2} < x < 0$. Ne deriva che i punti $-2 - \sqrt{2}, \sqrt{2}$ sono di massimo locale ed il punto $-2 + \sqrt{2}$ è un punto di minimo locale.

Per quanto riguarda gli asintoti, l'unica possibilità è che siano a $+ \pm \infty$. Si ha

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

da cui si deduce che la retta $y = 0$ è asintoto per $f$ a $\pm\infty$.

Dato che $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ ed $f(-2 + \sqrt{2}) = 2(1 - \sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}} < 0$ questo ultimo valore è anche il minimo assoluto di $f$. Mentre il massimo assoluto di $f$ è il più grande tra i due massimi locali, cioè $f(\sqrt{2}) = 2(1 + \sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$ (da $-\sqrt{2} > -2 - \sqrt{2}$ deriva $f(\sqrt{2}) > f(-2 - \sqrt{2}) = 2(1 + \sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}}$).

(2) La funzione $f$ è derivabile due volte sugli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ e

$$, \qquad f''(x) = \begin{cases} e^{-x}(x^2 - 2x - 2) & x > 0 \\ e^{x}(x^2 + 6x + 6) & x < 0 \end{cases}.$$

Si calcola subito che $f''(x) \geq 0$ solo sugli intervalli $(-\infty, -3 - \sqrt{3}]$, $[-3 + \sqrt{3}, 0]$ e $[1 + \sqrt{3}, +\infty)$. Da qui si deduce subito che $f$ è convessa su tali intervalli.

(3) Si procede separando gli integrali

$$\int_{-2}^{1} e^{-|x|}(x^2 + 2x)\, dx = \int_{-2}^{-1} e^{x}(x^2 + 2x)\, dx + \int_{-1}^{1} e^{-|x|}(x^2 + 2x)\, dx.$$

Usando il fatto che $e^{-|x|}x^2$ è pari e che $e^{-|x|}2x$ è dispari si ha

$$\int_{-2}^{1} e^{-|x|}(x^2 + 2x)\, dx = \int_{-2}^{-1} e^{x}(x^2 + 2x)\, dx + 2\int_{-1}^{0} e^{x}x^2\, dx.$$

Ci si limita quindi ad integrare per parti $e^x x^2$ e $e^x 2x$ e si ha

$$\int e^x x^2\, dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + c, \qquad \int e^x 2x\, dx = e^x(2x - 2) + c$$

da cui si calcola

$$\int_{-2}^{1} e^{-|x|}(x^2+2x)\,dx = e^x(x^2-2x+2)|_{-2}^{-1} + 2e^x(2x-2)|_{-1}^{0} = 4 - 9e^{-1} - 4e^{-2}.$$

(4) L'equazione $f(x) = \beta$ ha soluzione se e solo se $\beta \in Im(f)$. Dal punto (1) si ha $Im(f) = [\min f, \max f]$ per cui $f(x) = \beta$ ha soluzione se e solo se $2(1-\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}} \leq \beta \leq 2(1+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$.