

Esercizi su integrali ed equazioni differenziali

marzo 2018

Integrali (trovare una primitiva delle seguenti funzioni e fare la verifica derivando)

1. $\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$ [Ris: $2\sqrt{x}(x - 2\sqrt{x} + 2)$]

2. $\sin^3(x)e^{\cos(x)}$ [Ris: $4\sin^4\left(\frac{x}{2}\right)e^{\cos(x)}$]

3. $\sin(\log(x))$ [Ris: $-\frac{1}{2}x \cos(\log(x)) - \sin(\log(x))$]

4. $\frac{2^x}{4^x + 1}$ [Ris: $\frac{\arctan(2^x)}{\log(2)}$]

5. $\sqrt{3 - 2x^2}$ [Ris: $\frac{1}{4} \left(2x\sqrt{3 - 2x^2} + 3\sqrt{2} \arcsin \left(\sqrt{\frac{2}{3}}x \right) \right)$]

6. $\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}}$ [Ris: $\frac{3}{14}(\sqrt{x} + 1)^{4/3}(4\sqrt{x} - 3)$]

Integrali (calcolare i seguenti integrali nell'intervallo di estremi indicati)

1. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin x + \cos x} dx$ [Ris: 0]

2. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{3 + 2\sin^2 x} dx$ [Ris: $\frac{\pi}{2\sqrt{15}}$]

(in questo caso conviene dividere numeratore e denominatore per $\cos^2(x)$ e quindi porre $\tan(x) = \sqrt{\frac{3}{5}} \tan(y)$, da cui derivando $(1 + \tan^2(x))dx = \sqrt{\frac{3}{5}}(1 + \tan^2(y))dy$)

Integrali (dire per quali valori $a > 0$ il limite per $k \rightarrow \infty$ è finito)

1. $\int_0^k \frac{x}{x^a + 3} dx$ [Ris: finito per $a > 2$] (in questo caso si può confrontare la funzione integranda con x^{1-a} , per $a > 2$, oppure con $\frac{x}{x^2+3}$, per $a \leq 2$ e $x > 1$)

2. $\int_1^k \frac{\log^2 x}{x^a} dx$ [Ris: per $a \neq 1$ integrale: $-\frac{x^{1-a}((a-1)^2 \log^2(x) + 2(a-1) \log(x) + 2)}{(a-1)^3}$
per $a = 1$ integrale: $\frac{\log^3(x)}{3}$, il limite è finito per $a > 1$]

Equazioni differenziali (risolvere le equazioni differenziali date)

$$1. \begin{cases} y'(x) = \frac{7x}{y(x)} \\ y(1) = 2 \end{cases} \quad [\text{Risp: } y(x) = \sqrt{7x^2 - 3}]$$

$$2. \begin{cases} y'(x) + y(x) = \frac{1}{2 + e^x} \\ y(0) = 2 \end{cases} \quad [\text{Risp: } y(x) = e^{-x}(\log(e^x + 2) + 2 - \log(3))]$$

$$3. \begin{cases} y'(x) + xy(x) = x^3 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad [\text{Risp: } y(x) = x^2 + 3e^{-\frac{x^2}{2}} - 2]$$

$$4. \begin{cases} y'(x) + \frac{y(x)}{x+1} = x^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad [\text{Risp: } y(x) = \frac{x^3(3x+4)}{12(x+1)}]$$

$$5. \begin{cases} y'(x) = 2y(x) - \frac{3x}{y(x)^2} \\ y(0) = 3 \end{cases} \quad [\text{Risp: } y(x) = \frac{\sqrt[3]{6x + 107e^{6x} + 1}}{2^{2/3}}]$$