Compito di Istituzioni di Matematica, Seconda parte

13 giugno 2018

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} t+1 & 1 & 10 \\ -3 & 2 & -13 \\ 2 & -3 & 4t \end{pmatrix}$.

(1) Provare che per $t = -1$ la matrice A è invertibile e trovare A^{-1}.
(2) Determinare per quali valori di t la matrice A non è invertibile.
(3) Per $t = 3$ trovare una base del nucleo dell'applicazione lineare associata ad A.
(4) Per $t = 3$ trovare un'equazione che descriva l'immagine di A.

Soluzione.

(1) Per $t = -1$ otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 10 \\ -3 & 2 & -13 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

che ha determinante $12 \neq 0$ ed è quindi invertibile. Usando la formula vista a lezione si ha che la matrice inversa è:

$$\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -47 & -26 & -33 \\ -38 & -20 & -30 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2) In generale il determinante della matrice A è dato dal polinomio $8t^2 - 19t - 15$ che ha radici $t_1 = 3$ e $t_2 = -\frac{5}{8}$. Quindi la matrice A è invertibile esattamente quando t è diverso da t_1 e t_2.

(3) Per $t = 3$ la matrice non è invertibile e diventa

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 10 \\ -3 & 2 & -13 \\ 2 & -3 & 12 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2 (le prime due colonne sono indipendenti). Quindi il suo nucleo ha dimensione $3 - 2 = 1$. Un generatore del nucleo (che ne costituisce quindi una base) è il vettore $(-3, 2, 1)$.

(4) L'immagine di A è generata dalle colonne di A. Per $t = 3$ le tre colonne sono linearmente dipendenti, ma poiché il primo minore 2×2 ha rango 2 le prime due colonne sono linearmente indipendenti (e dunque la terza è dipendente dalle prime due). Quindi l'immagine di A è generata dalle prime due colonne. Se scriviamo la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & x \\ -3 & 2 & y \\ 2 & -3 & z \end{pmatrix}$$

abbiamo che $\det B = 0$ esattamente quando la terza colonna è dipendente dalle prime due, ovvero quando il vettore di coordinate (x, y, z) si trova nel piano generato dalle prime due colonne. Pertanto l'equazione che descrive il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dalle prime due colonne è proprio $\det B = 0$, ovvero

$$5x + 14y + 11z = 0.$$

Esercizio 2. Data
$$f(x) = \frac{x^2+2x}{1+x}$$

1. Calcolare $\int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx$.
2. Determinare se esiste finito $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.
3. Calcolare poi
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{x^2+2x}{1+|x|}\,dx.$$

Soluzione. 1. Usando $x^2+2x = x(x+1)+x+1-1 = (x+1)(x+1)-1$ si ha
$$\int \frac{x^2+2x}{1+x}\,dx = \int \left((x+1) - \frac{1}{1+x}\right)dx = \frac{(x+1)^2}{2} - \ln(|1+x|) + c$$
da cui
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{x^2+2x}{1+x}\,dx = 2 - \ln(2) - \frac{1}{8} + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{8} - 2\ln(2)$$
2. Poiché una primitiva di $\frac{x^2+2x}{1+x}$ è data da $\frac{(x+1)^2}{2} - \ln(|1+x|)$ si calcola
$$\lim_{c\to -1+} \int_{c}^{1} \frac{x^2+2x}{1+x}\,dx = \lim_{c\to -1+} \left(2 - \ln(2) - \frac{(c+1)^2}{2} + \ln(|1+c|)\right) = -\infty.$$
3. Risulta
$$\frac{x^2+2x}{1+|x|} = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x}{1+x} & \text{se } x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{x^2+2x}{1-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$
per cui
$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2+2x}{1+|x|}\,dx = \int_{0}^{1} \frac{x^2+2x}{1+x}\,dx + \int_{-1}^{0} \frac{x^2+2x}{1-x}\,dx.$$
Da sopra si ha
$$\int_{0}^{1} \frac{x^2+2x}{1+x}\,dx = 2 - \ln(2) - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \ln(2)$$
Per il secondo integrale si scrive $x^2+2x = x(x-1)+3x-3+3 = (x+3)(x-1)+3$ e si ottiene
$$\int \frac{x^2+2x}{1+x}\,dx = \int \left((x+3) + 3\frac{1}{1-x}\right)dx = \frac{(x+3)^2}{2} - 3\ln(|1-x|) + c$$
da cui
$$\int_{-1}^{0} \frac{x^2+2x}{1-x}\,dx = \frac{9}{2} - 2 + 3\ln(2) = \frac{5}{2} + 3\ln(2).$$
Sommando si ha
$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2+2x}{1+|x|}\,dx = \frac{13}{4} + 2\ln(2).$$

Esercizio 3. Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{2e^x + 1}{y}$$

(1) Calcolare la soluzione tale che $y(0) = 1$ e trovarne massimo e minimo su $[0, 1]$.

(2) Determinare la soluzione tale che $y(0) = -1$ e stabilire se è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Soluzione. L'equazione data è a variabili separabili $yy' = 2e^x + 1$ e si integra come

$$y^2(x) = 2(2e^x + x) + c \Longrightarrow y(x) = \pm\sqrt{4e^x + 2x + c}$$

ossia le soluzioni sono date da $y(x) = +\sqrt{4e^x + 2x + c}$ oppure $y(x) = -\sqrt{4e^x + 2x + c}$ e sono definite per $x \in \mathbb{R}$ tali che $4e^x + 2x + c > 0$, cioè $y(x) > 0$.

(1) La soluzione tale che $y(0) = 1$ è quindi quella soluzione positiva tale che $y(0) = \sqrt{4 + c} = 1$ ossia $c = -3$ e

$$y(x) = \sqrt{4e^x + 2x - 3}.$$

La funzione $g(x) = 4e^x + 2x - 3$ ha derivata $g'(x) = 4e^x + 2 > 0$ per cui è crescente su $\mathbb{R}$; poichè $g(0) = 1$, si ha $g(x) \geq 1$ su $[0, 1]$. Questo implica che $y(x)$ è ben definita e continua su $[0, 1]$ per cui ammette massimo e minimo. Essendo $y'(x) > 0$ (vedi equazione risolta da y) y ha minimo in $x = 0$ uguale a 1 e massimo in $x = 1$ uguale a $\sqrt{4e - 1}$.

(2) La soluzione tale che $y(0) = -1$ è quindi quella soluzione negativa tale che $y(0) = -\sqrt{4 + c} = -1$ ossia $c = -3$ e

$$y(x) = -\sqrt{4e^x + 2x - 3}.$$

$y(x)$ è definita per tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $4e^x + 2x - 3 > 0$ e questo insieme non coincide con $\mathbb{R}$ perché nel punto $x = -1$ $4e^{-1} + 2(-1) - 3 > 0$.