Compito di Istituzioni di Matematica, Seconda parte

10 gennaio 2019

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1.

(1) Determinare tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$(z-i)^3 = 8i.$$

(2) Determinare tutte le $(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ soluzioni del sistema

$$\begin{cases} (z-i)^3 = 8i \\ \bar{z}(w+\bar{w}) = i(\bar{z}-z) - |w| - z. \end{cases}$$

Soluzione:

(1) Ponendo $a = z - i$ (e quindi $z = a + i$) otteniamo

$$a^3 = 8i.$$

Una soluzione è data da $a_1 = -2i$ le altre soluzioni le otteniamo moltiplicando per una radice terza dell'unità, ovvero per una soluzione di $\omega^3 = 1$, ovvero $\omega = 1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Quindi otteniamo $a_1 = -2i$, $a_2 = \sqrt{3} + i$, $a_3 = -\sqrt{3} + i$ e di conseguenza, $z_1 = -i, z_2 = \sqrt{3} + 2i, z_3 = -\sqrt{3} + 2i$.

(2) La prima equazione del sistema è stata risolta sopra. Per quanto riguarda la seconda equazione, scrivendo $z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e scrivendo $w = x + iy$ abbiamo

$$(a - ib)2x = i(-2ib) - \sqrt{x^2 + y^2} - a - ib$$

e separando parte reale e parte immaginaria otteniamo

$$\begin{cases} 2ax &= 2b - \sqrt{x^2+y^2} - a \\ -2bx &= -b \end{cases}$$

La seconda equazione implica che se $b \neq 0$ allora $x = \frac{1}{2}$ e questo è sempre vero per i tre valori di z trovati (ricordiamo che b è la parte immaginaria di z). Sostituendo $x = \frac{1}{2}$ nella prima equazione allora otteniamo

$$a = 2b - \sqrt{\frac{1}{4} + y^2} - a$$

equivalente a $\sqrt{\frac{1}{4} + y^2} = 2(b - a)$ da cui esiste y soluzione reale solo se $b > a$ e si ha

$$y = \pm\sqrt{4(a-b)^2 - \frac{1}{4}}.$$

Per $z_1 = -i$ la condizione $-1 = b > a = 0$ non è verificata per cui non esiste w soluzione, per $z_2 = \sqrt{3} + 2i$ abbiamo $w = \frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{111}{4} - 16\sqrt{3}}$, per $z_3 = -\sqrt{3} + 2i$ abbiamo $w = \frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{111}{4} + 16\sqrt{3}}$.

Esercizio 2.

(1) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y' + 3x^5 + 3x^2 y = 0$;

(2) Determinare la soluzione dell'equazione differenziale
$$y' = x^5 y^4 + x^2 y$$
tale che $y(0) = \frac{1}{2}$.

Soluzione:

(1) Come primo passo si calcola la soluzione generale v dell'equazione omogenea $v' + 3x^2 v = 0$ che è data da $v(x) = Ce^{-x^3}$ al variare di $C \in \mathbb{R}$. Cerco poi una soluzione particolare dell'equazione di partenza della forma $y(x) = g(x)v(x)$ con g da determinare. Derivando si ha che g deve risolvere l'equazione $g'(x)v(x) = -3x^5$, ossia, scelto ad esempio $C = 1$, $g'(x) = -3x^5 e^{x^3}$. Integrando nella variabile $t = x^3$ e poi per parti si ha $g(x) = (1 - x^3)e^{x^3}$, da cui una soluzione particolare y_p di $y' + 3x^5 + 3x^2 y = 0$ $y_p(x) = 1 - x^3$. La soluzione generale cercata y si ottiene sommando a y_p una qualsiasi soluzione dell'omogenea, da cui
$$y(x) = 1 - x^3 + Ce^{-x^3}$$
definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(2) E' un'equazione di Bernoulli di esponente $\alpha = 4$ e con dato iniziale non nullo per cui divido tutto per y^4 ed ottengo $\frac{y'}{y^4} = x^5 + x^2 \frac{1}{y^3}$. Faccio poi il cambio di variabile $u(x) = y^{1-\alpha}(x) = 1/y^3(x)$ e derivando u si ottiene
$$u' = (-3)\frac{y'}{y^4} = (-3)(x^5 + x^2 \frac{1}{y^3}) = -3x^5 - 3x^2 u$$
con la condizione iniziale $u(0) = 1/y^3(0) = 8$. Usando il punto (1) si ha che $u(x) = 1 - x^3 + Ce^{-x^3}$ con C da determinare in modo tale che $u(0) = 8$. Si ha $C = 7$ e quindi la soluzione cercata $y(x)$ verifica
$$y^3(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{1 - x^3 + 7e^{-x^3}}.$$
ossia
$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - x^3 + 7e^{-x^3}}}.$$

Esercizio 3. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ si consideri l'applicazione lineare f_t associata alla matrice A_t definita da

$$\begin{pmatrix} t & -2 & 1 \\ 3 & t & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Trovare i valori di t, per cui l'applicazione f_t non è iniettiva;
b) sia t_0 il più piccolo valore di t trovato al punto precedente; trovare una base di $\ker f_{t_0}$, ovvero del ker di f_t per $t = t_0$;
c) sia $t_1 = 3$; trovare una base dell'immagine di f_{t_1}, ovvero di f_t per $t = t_1$;
d) stabilire per quali valori di t il vettore $v = (1, 1, 2)$ appartiene all'immagine di f_t.

Soluzione:

a) Il determinante di A_t è $t^2 - 5t + 6 = (t-2)(t-3)$ per cui per $t \neq 2, 3$ il rango di A_t è 3 e quindi la dimensione del nucleo è 0. Per $t = 2, 3$ la matrice A_t non è invertibile e dunque f_t non è iniettiva.
b) Abbiamo che $t_0 = 2$. Quindi la matrice per $t = 2$ diventa

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice ha rango 2 (il minore 2×2 in alto a sinistra ha determinante non nullo) e si può vedere che la terza colonna è la somma di $1/5$ della prima colonna e $(-3/10)$ della seconda colonna. Quindi il nucleo ha dimensione 1 e una sua base è costituita dal singolo vettore $(1/5, -3/10, -1)$.
c) La matrice per $t = 3$ diventa

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice ha rango 2 (il minore 2×2 in alto a sinistra ha determinante non nullo) e quindi le prime due colonne danno una base dell'immagine: $\{(3, 3, 5), (-2, 3, 0)\}$.
d) Per $t \neq 2, 3$ la matrice è invertibile e il vettore appartiene all'immagine.
Per $t = 2$ notiamo che il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

è 2 (invariato rispetto a $\mathrm{rk} A_2$): lo si può vedere calcolando il determinante di tutti i minori 2×2 oppure notando che la quarta colonna si ottiene così:

$$1/5(I^a \text{ colonna}) + 1/5(II^a \text{ colonna}) + (III^a \text{ colonna})$$

Quindi il vettore v appartiene all'immagine.

Infine per $t = 3$ il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

è $3 > 2 = \mathrm{rk} A_3$ (il determinante del minore 3×3 con prima, terza e quarta colonna è -1). Quindi in questo caso il vettore v non appartiene all'immagine.