Compito di Istituzioni di Matematica, Seconda parte

3 maggio 2019

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Determinare le soluzioni complesse del sistema

$$\begin{cases} z\bar{z} + (i-1)z - (1+i)\bar{z} = 0 \\ (1-i)z + (1+i)\bar{z} - 4 = 0 \end{cases}$$

Determinare poi le radici quadrate complesse di ogni soluzione trovata e scriverle sia in forma algebrica che trigonometrico/esponenziale.

Soluzioni. Un modo per risolvere il sistema è riscrivere le equazioni ponendo $z = x + iy$ e $\bar{z} = x - iy$ con x e y incognite reali e separando parte reale e parte immaginaria.

In alternativa possiamo riscrivere la prima equazione come

$$(z - 1 - i)(\bar{z} - 1 + i) - 4 = 0$$

ovvero $(z-1-i)\overline{(z-1-i)} = 4$, cioé $|z - (1+i)| = 2$. Dunque il numero complesso z si trova in una circonferenza di raggio 2 e di centro $1 + i$.

La seconda equazione separando parte reale e parte immaginaria diventa:

$$2x + 2y = 4$$

e dunque $x + y = 2$. Quindi le uniche soluzioni sono $z_1 = 2 = 2e^{0i}$, $z_2 = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Le radici quadrate sono dunque $\sqrt{2} = \sqrt{2}e^{0i}$, $-\sqrt{2} = \sqrt{2}e^{i\pi}$, $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $-1 - i = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

Esercizio 2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{e^{x+1} - 2x^3}{e^x}$ studiarne il grafico, in particolare

1. determinare le zone di monotonia e gli eventuali massimi e minimo locali;
2. determinarne estremo superiore ed inferiore ed eventuali asintoti.

Soluzioni.

Si nota subito che la funzione è ben definita su tutto $\mathbb{R}$, è continua e infinite volte derivabile in ogni punto dell'asse reale. Si noti che vale $f(x) = e - 2x^3e^{-x}$.

1. Vista la regolarità della funzione per studiare la monotonia e l'esistenza di minimi/massimi locali valuta si guarda il segno della derivata. Si ha

$$f'(x) = 2x^2(x-3)e^{-x} \qquad f''(x) = -2x(x^2 - 6x + 6)e^{-x}$$

per cui f si annulla solo nei punti $0, 3$ ed è positiva solo a destra di 3. Si deduce f è monotona crescente su $[3, +\infty)$ e monotona decrescente su $(-\infty, 3]$. Ne deriva che 3 è un punto di minimo locale, anzi di minimo assoluto ($f(x) \geq f(3)$ $\forall x < 3$ dato che f decresce su $(-\infty, 3]$, analogamente $f(3) \leq f(x)$ $\forall x > 3$ dato che f cresce su $[3, +\infty)$). Il punto 0 è un punto stazionario ma non è ne' massimo ne' minimo.

2. L'estremo inferiore di f coincide con il suo minimo assoluto $f(3) = e - (54/e^3)$ calcolato sopra. Vista la monotonia di f il suo estremo superiore è il più grande tra il limite di f a $+\infty$ e quello a $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = e - \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{e^x} = e \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = e - (-\infty)^3(+\infty) = +\infty$$

da cui $\sup f = +\infty$. Dal conto sopra si vede anche che f ha un asintoto orizzontale $y = e$ a $+\infty$. Vediamo se f può avere un asintoto obliquo a $-\infty$. Si calcola

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{e}{x} - \frac{2x^2}{e^x}\right) = 0 - \lim_{x\to-\infty} 2x^2e^{-x} = -(+\infty) = -\infty$$

e si conclude che f non ha asintoti obliqui a $-\infty$ ossia f diverge a $+\infty$ per $x \to -\infty$ piu' velocemente di qualsiasi retta.

Esercizio 3. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ sia $f_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$f_t(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 5x_2 + tx_3 - tx_4, x_1 + tx_2 + tx_3 + 5x_4, 2x_1 - 10x_2 + (t+1)x_3 - 3tx_4)$.

a) Scrivere la matrice associata ad f_t rispetto alle basi standard;

b) trovare i valori di t, per cui l'applicazione f_t non è suriettiva; per tali valori trovare una base dell'immagine di f_t;

c) stabilire per quali valori di t il vettore $w_t = (1, t, -1)$ appartiene all'immagine di f_t;

d) posto $t = 0$, determinare la controimmagine di w_0 mediante f_0.

Soluzioni.

a) La matrice associata è:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & t & -t \\ 1 & t & t & 5 \\ 2 & -10 & t+1 & -3t \end{pmatrix}.$$

b) L'applicazione f_t è suriettiva se la dimensione dell'immagine, pari al rango della matrice associata, è uguale alla dimensione dello spazio di arrivo, cioè 3.

Il determinante del minore fatto con le prime tre colonne è $-t^2-4t+5$, che si annulla per $t = -5$ e $t = 1$. Quindi per $t \neq 1, -5$ l'applicazione f_t è suriettiva.

Per $t = -5$ otteniamo che la seconda colonna è (-5) volte la prima e che prima e seconda riga della matrice $3x4$ sono uguali. Inoltre il minore $2x2$ fatto con righe 2 e 3 e colonne 1 e 3 ha determinante 6, dunque la matrice ha rango 2. Dunque l'applicazione f_{-5} non può essere suriettiva.

Per $t = 1$ il determinante del minore fatto con le colonne 1,2,4 è -6, dunque f_1 è suriettiva.

c) Per $t \neq -5$ il vettore w_t appartiene sempre all'immagine, perché f_t è suriettiva.

Per $t = -5$ il determinante del minore fatto con le colonne 1 e 3 e con la colonna corrispondente a w_{-5} è 24, dunque il rango della matrice completa è 3, che è dunque maggiore del rango della matrice completa. Quindi il vettore w_{-5} non appartiene all'immagine.

d) Per $t = 0$ notiamo intanto che il vettore $(5, 1, 0, -1)$ appartiene al nucleo di f_0, e dunque lo genera. Inoltre è facile vedere che $f_0(1, 0, -3, -1/5) = w_0$ e quindi la controimmagine di w_0 è data da tutti i vettori della forma $v_s = (1, 0, -3, -1/5)+s(5, 1, 0, -1)$, per $s \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4. Calcolare i seguenti integrali

$$(a) \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos(x)}{(2+\sin(x))^2}\, dx\,; \quad (b) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\, dx\,.$$

Soluzioni.

(a) Faccio il cambio di variabile $\sin(x) = t$, da cui $\cos(x)\, dx = dt$ ed estremi rispettivamente $\sin(0) = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$. Si ottiene

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2\cos(x)}{(2+\sin(x))^2}\, dx = \int_0^1 \frac{2}{(2+t)^2}\, dt = -\frac{2}{(2+t)}\Big|_0^1 = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3};$$

(b) Si tratta di un integrale improprio che si calcola prima su $[0, M]$ e poi se ne fa il limite per $M \to +\infty$. Facendo il cambio di variabile $1/x = y$ si ottiene che gli estremi di integrazione diventano $\{1, 1/M\}$ che, quando $M \to +\infty$, diventano rispettivamente, $\{1, 0\}$. Inoltre si ha $-1/x^2\, dx = dy$ ed il -1 si assorbe dallo scambio di estremi di integrazione

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\, dx = -\int_1^0 \ln\Big(1+y\Big)\, dy = \int_0^1 \ln\Big(1+y\Big)\, dy.$$

Integrando per parti, si ha

$$\int_0^1 \ln\Big(1+y\Big)\, dy = y\ln(1+y)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{y}{1+y}\, dy = \ln(2) - \int_0^1 \frac{y+1-1}{1+y}\, dy$$

$$= \ln(2) - \int_0^1 \Big(1 - \frac{1}{1+y}\Big)\, dy = \ln(2) - 1 + \ln(1+y)\Big|_0^1 = 2\ln(2) - 1 = \ln(4/3).$$

Si poteva anche integrare per parti senza fare il cambio di variabile, integrando $1/x^2$ e derivando $\ln(1+1/x)$ ottenendo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\, dx = -\frac{1}{x} \ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \Big(-\frac{1}{x}\Big)\frac{1}{(1+\frac{1}{x})}\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)\, dx$$

$$= \ln(2) - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3+x^2}\, dx.$$

Per risolvere questo ultimo integrale bisogna usare il metodo di Hermite e calcolare i coefficienti A, B, C tali che

$$\frac{1}{x^3+x^2} = \frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2} + \frac{C}{x+1}.$$

Si ha

$$\frac{1}{x^3+x^2} = \frac{-x+1}{x^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$$

e

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3+x^2}\, dx = -\frac{1}{x} + \ln\Big(\frac{x+1}{x}\Big)\Big|_1^{+\infty} = 1 - \ln(2)$$