Soluzioni degli Esercizi per il Corso di Istituzioni di Matematica

1) La retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ ha equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

$$a)\ y = 2x;\ b)\ y = \log_2(e)(x-1);\ c)\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x;\ d)\ y = \frac{3}{4}x - 1.$$

2)

$a)$ $f'(x) = (x+1)^{x^2}\Big(2x\log(x+1) + \dfrac{x^2}{x+1}\Big);$ $\qquad b)$ $f'(x) = \dfrac{\log_2(e)}{x\log_2(x)});$

$c)$ $f'(x) = -3\log(4)\sin(3x)4^{\cos(3x)} + \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x+7}};$ $\qquad d)$ $f'(x) = \dfrac{-1}{6\sqrt[3]{x^2}\sqrt{1-\sqrt[3]{x}}};$

$e)$ $f'(x) = \dfrac{2x + \arccos(-x) - \arcsin(x)(\sqrt{1-x^2}+1)}{\sqrt{1-x^2}(2x+\arccos(-x))^2};$ $\qquad f)$ $f'(x) = \log_3(xe).$

3) $a)$ La funzione $f(x) = x|x|$ è derivabile in $x_0 = 0$ e la sua derivata vale 0 (basta fare il limite destro e sinistro del rapporto incrementale oppure disegnare la funzione è verificare che la retta $y = 0$ è tangente al grafico di f).

$b)$ La funzione $f(x) = |x-2|$ è derivabile in $x_0 = 1$ e la sua derivata vale -1 (coincide in un intorno del punto $x_0 = 1$ con la funzione $f(x) = 2-x$). La funzione $f(x) = |x-2|$ ha anche un punto angoloso in $x_0 = 2$.

$c)$ Dato che $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x-1}\sqrt{x+1}$ e $x - 1 = \sqrt{x-1}\sqrt{x-1}$ si calcola che

$$\lim_{x\to1+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = \lim_{x\to1+} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = +\infty.$$

Analogamente, usando che $x-1 = -\sqrt{1-x}\sqrt{1-x}$, si ha

$$\lim_{x\to1-} \frac{\sqrt{1-x}}{x-1} = \lim_{x\to1-} \frac{-1}{\sqrt{1-x}} = -\infty.$$

La funzione ha quindi in $x = 1$ un punto di cuspide.

$d)$ La funzione è continua in $x_0 = 0$. La derivata destra in $x_0 = 0$ vale

$$\lim_{x\to0+} \frac{x+1-1}{x} = 1,$$

e quella sinistra

$$\lim_{x\to0-} \frac{\cos(x)-1}{x} = \lim_{x\to0-} \frac{-\sin^2(x)}{x(\cos(x)+1)} = 0.$$

Per calcolare le derivate destre e sinistre in $x_0 = 0$ si poteva anche usare che la funzione a destra di $x_0 = 0$ coincide con la funzione $x+1$ che è derivabile in $x_0 = 0$ con derivata uguale ad 1 (e quindi anche derivata destra in $x_0 = 0$ uguale ad 1), analogamente f a sinistra di $x_0 = 0$ coincide con la funzione $\cos(x)$ che ha derivata $-\sin(x)$ uguale a 0 in $x_0 = 0$ (e quindi ha derivata sinistra in $x_0 = 0$ uguale a 0).

Si deduce che in $x_0 = 0$ f ha un punto angoloso.

e) Dato che 2^x è derivabile in $x_0 = 0$ con derivata $\log(2)$ basta studiare il limite del rapporto incrementale di $\sqrt[5]{x^3}$. Si calcola

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{x^3}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^5}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = +\infty,$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{x^3} + 2^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{x^3}}{x} + \lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{x} = +\infty + \log(2) = +\infty,$$

che equivale a dire che "$f'(0) = +\infty$", ossia f ha un punto a tangente verticale in $x_0 = 0$.

f) La funzione non è continua in $x_0 = \pi$ per cui non può essere derivabile. In $x_0 = \pi$ ha una discontinuità di tipo salto perché il limite sinistro vale 1 e quello destro -1.

4) Vedere il foglio dei grafici allegato al file.

5) *a*) f ha un asintoto verticale in $x = -3$, infatti

$$\lim_{x\to -3+} \frac{2 - x^2}{x + 3} = \frac{-7}{0+} = -\infty, \qquad \lim_{x\to -3-} \frac{2 - x^2}{x + 3} = \frac{-7}{0-} = +\infty.$$

Calcoliamo i limiti a $+\infty$ ed a $-\infty$ di f:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2 - x^2}{x + 3} = -\infty, \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{2 - x^2}{x + 3} = +\infty.$$

Calcoliamo i limiti a $+\infty$ ed a $-\infty$ di $f(x)/x$:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2 - x^2}{x^2 + 3x} = -1, \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{2 - x^2}{x^2 + 3x} = -1.$$

Rimane da calcolare se esiste il termine noto delle rette con pendenze -1 a $+\infty$ ed a $-\infty$, rispettivamente:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2 - x^2}{x + 3} + x = \lim_{x\to +\infty} \frac{2 + 3x}{x + 3} = 3, \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{2 - x^2}{x + 3} + x = \lim_{x\to -\infty} \frac{2 + 3x}{x + 3} = 3.$$

La retta $y = -x + 3$ è asintoto obliquo per f sia a $+\infty$ che a $-\infty$.

b) Il denominatore $e^x + x^2$ non ha zeri su $\mathbb{R}$ per cui non ci sono asintoti verticali. Si calcola

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{4^{-x}}{e^x + x^2} = 0, \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{4^{-x}}{e^x + x^2} = +\infty.$$

Si deduce che f ha un asintoto orizzontale $y = 0$ a $+\infty$ e potrebbe avere un asintoto obliquo a $-\infty$. Poichè

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4^{-x}}{x(e^x + x^2)} = +\infty$$

non esiste un asintoto obliquo a $-\infty$.

c) Si calcola

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3} = +\infty = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3}$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2+3}{x^2}} = 1$$

mentre dall'uguaglianza $x = -\sqrt{x^2}$ valida per $x < 0$ si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{x^2+3}{x^2}} = -1.$$

Rimane da calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3-x^2}{\sqrt{x^2+3}+x} = 0$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3} + x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+3-x^2}{\sqrt{x^2+3}-x} = 0.$$

Concludendo la retta $y = x$ è asintoto obliquo per f a $+\infty$ e la retta $y = -x$ è asintoto obliquo per f a $-\infty$.

d) Il dominio della funzione è l'intervallo $(-2, 2\sqrt[3]{2}]$ per cui non ci sono asintoti obliqui o orizzontali (la funzione non è definita in nessun intorno di $+\infty, -\infty$). Poiché

$$\lim_{x\to-2+} \sqrt{\frac{16-x^3}{x+2}} = +\infty$$

la funzione ha un asintoto verticale in $x = -2$.

e) La funzione a denominatore $x^2 + x + 4$ non ha zeri reali per cui la funzione è definita su tutto l'asse reale e non ci sono asintoti verticali. Calcoliamo intanto il limite a $+\infty$ ed in caso la pendenza dell'eventuale asintoto obliquo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x-4}{x^2+x+4} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x-4}{x(x^2+x+4)} = 1.$$

Rimane da calcolare se esiste

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3+2x-4}{x^2+x+4} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-x^2+2x-8}{x^2+x+4}\right) = -1.$$

Se ne deduce che f ha asintoto obliquo $y = x - 1$ a $+\infty$. Analogamente a $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2x-4}{x^2+x+4} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2x-4}{x(x^2+x+4)} = 1,$$

ed inoltre

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+2x-4}{x^2+x+4}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x^2+2x-8}{x^2+x+4}\right)=-1.$$

Ne risulta che f ha asintoto obliquo $y=x-1$ anche a $-\infty$.

f) La funzione f è definita su tutto l'asse reale e non ci sono asintoti verticali. Calcoliamo intanto il limite a $+\infty$, usando la composizione di limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\arctan(xe^{-x})=0.$$

Analogamente

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{-x}=-\infty\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\arctan(xe^{-x})=-\frac{\pi}{2}.$$

Concludendo f ha un asintoto orizzontale $y=0$ a $+\infty$ ed ha anche un asintoto orizzontale $y=-\pi/2$ a $-\infty$.

6) *a*) Per prima cosa si nota che f è definita solo se l'argomento di arcsin è compreso tra -1 ed 1. Sviluppando le disequazioni $-1\le x^2-2x-4\le 1$ si ottiene che il dominio di f è dato da $[1-\sqrt{6},-1]\cup[3,1+\sqrt{6}]$. Calcolando la derivata si deduce che f è crescente in $[3,1+\sqrt{6}]$ e decrescente su $[1-\sqrt{6},-1]$.

b) Calcolando la derivata si ottiene che f è crescente in $[-1/2,1/2]$, f è decrescente su $[1/2,+\infty)$ e separatamente su $(-\infty,-1/2]$.

c) Data $f(x)=\log(\cos(x)+\sin(x))$ si ha che f è definita su $D=\{x\in\mathbb{R}:\cos(x)+\sin(x)>0\}$. In ogni punto x di D f è derivabile e vale

$$f'(x)=\frac{\cos(x)-\sin(x)}{(\cos(x)+\sin(x))}.$$

Si deduce che f è crescente negli intervalli contenuti in $D_1=\{x\in D:\cos(x)-\sin(x)\ge 0\}$ e decrescente in quelli contenuti in $D\setminus D_1$. Si osservi che, da $\cos(x)+\sin(x)=\sqrt{2}(\sin(x+\pi/4))$ si ha

$$D=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}+2k\pi)\qquad\text{e}\qquad D_1=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[2k\pi-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}+2k\pi].$$

d) Il dominio di $f(x)=\dfrac{x^2+6x+6}{x+1}$ è $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ed anche la derivata è definita su $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ e vale

$$f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\Rightarrow f'(x)\ge 0 \text{ su } (-\infty,-2]\cup[0,+\infty),$$

e $f'(x)<0$ su $(-2,-1)\cup(-1,0)$. Se ne deduce

f crescente su $(-\infty,-2]$; f crescente su $[0,+\infty)$;

f decrescente su $[0,-1)$; f decrescente su $(-1,0]$.

Attenzione: f non è globalmente decrescente su $(-2,-1) \cup (-1,0)$.

7) *a*) f non ha punti in cui la derivata si annulla, usando il fatto che f è crescente in $[3, 1+\sqrt{6}]$ e decrescente su $[1-\sqrt{6}, -1]$, si ha che f ha un punto di max locale in $1+\sqrt{6}$ ed in $1-\sqrt{6}$, in cui f vale in entrambi i punti $\pi/2$. Il valore $\pi/2$ è quindi un massimo assoluto per f; f ha un punto di min locale in 3 ed in -1, in cui f vale in entrambi i punti $-\pi/2$. Il valore $-\pi/2$ è quindi un minimo assoluto per f.

b) f ha un punto di max locale in $1/2$ in cui f vale $e^{-1/2}/2$, f ha un punto di min locale in $-1/2$ in cui vale $-e^{-1/2}/2$. Poiché f ha limite 0 a $+\infty$ ed a $-\infty$, se ne deduce che $-e^{-1/2}/2$ è un minimo assoluto e $e^{-1/2}/2$ è un massimo assoluto per f.

c) f ha punti di max locale in $\pi/4 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ in cui vale $\log(2)/2$. Questi sono punti di massimo assoluto per f in cui f ha max $\log(2)/2$.

d) f ha un punto di max locale in $x = -2$ in cui vale 4 e di minimo locale in $x = 0$ in cui vale 6. Poichè $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, si ha che $\sup f = +\infty$ e $\inf f = -\infty$ ed f non ha né max, né minimo assoluto.

8) *a*) Visto che la funzione è derivabile 2 volte si calcola la derivata seconda e se ne studia il segno:

$$f''(x) = \sin(x+4) \Rightarrow f''(x) \geq 0 \text{ su } x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k\pi - 4, \pi - 4 + 2k\pi];$$

questo implica che f è convessa in $[2k\pi - 4, \pi - 4 + 2k\pi]$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

b) Analogamente a sopra studio il segno della derivata seconda:

$$f'(x) = -\frac{1}{1+(1-x)^2} = -\frac{1}{x^2-2x+2}, \qquad f''(x) = \frac{2x-2}{(1+(1-x)^2)^2}.$$

f è convessa su $[1, +\infty)$ e concava su $(-\infty, 1]$.

c) Si ha $f'(x) = 12x - 3x^2 + 2$ e $f''(x) = 12 - 6x$ per cui f è convessa in $(-\infty, 2]$ e concava su $[2, +\infty)$.

d) Si ha $f'(x) = e^{-2x^2}(1-4x^2)$ e

$$f''(x) = e^{-2x^2}(-12x + 16x^3) = e^{-2x^2} 4x(4x^2 - 3).$$

Se ne deduce che f è convessa in $[-\sqrt{3}/2, 0]$, f è convessa in $[\sqrt{3}/2 + \infty)$, f è concava in $(-\infty, -\sqrt{3}/2]$ ed f è concava in $[0, \sqrt{3}/2]$.

8) Vedere i grafici nel file allegato.