Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema X

21 febbraio 2018

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - n^{-\alpha/2}\right)(2\alpha)^n}{n^{1/2} + n^{\alpha}}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Si tratta di una serie con coefficiente $a_n = \frac{\left(1-n^{-\alpha/2}\right)(2\alpha)^n}{n^{1/2}+n^{\alpha}}$ dipendente dal parametro α e di segno non costante (a meno di non scegliere α. Non si tratta di una serie di potenze espressa in 2α perchè anche il coefficiente davanti a $(2\alpha)^n$ dipende da α. Studio la converge assoluta della serie ed applico il criterio della radice. Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |2\alpha|,$$

dove ho usato che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^{1/2} + n^{\alpha}} = 1$ e $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|1 - n^{-\alpha/2}|} = 1$ per ogni α (infatti $|1 - n^{-\alpha/2}| \leq 2$ se $\alpha \geq 0$, e $|1 - n^{-\alpha/2}| \leq n^{|\alpha|/2}$ se $\alpha < 0$ e la radice n-esima di ogni potenza finita di n tende ad 1). Se ne deduce che la serie converge assolutamente per $|2\alpha| < 1$ mentre non converge per $|2\alpha| > 1$ (il suo termine a_n infatti in questo caso non converge a 0 che è la condizione necessaria alla convergenza). In particolare se $\alpha > 1/2$ la serie diverge positivamente essendo a termini positivi. Rimane da indagare i valori $\alpha = 1/2, -1/2$. Per $\alpha = 1/2$ la serie diventa una serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - n^{-1/4}\right)}{2n^{1/2}}$$

che diverge per confronto asintotico con la serie di termine $1/\sqrt{n}$, ossia armonica di esponente $1/2$. Per $\alpha = -1/2$ la serie diventa una serie a termini oscillanti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - n^{1/4}\right)(-1)^n}{n^{1/2} + 1/\sqrt{n}} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\sqrt[4]{n} - 1\right)\sqrt{n}}{n+1}.$$

Conviene vedere questa serie come differenza di due serie di Leibniz, una con termine $b_n = \frac{\sqrt[4]{n^3}}{n+1}$, l'altra con termine $c_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$, entrambe decrescenti ed infinitesime. Infatti dette $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{x+1}, g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$, si ha che $f'(x) = \dfrac{3-x}{4\sqrt[4]{x}(x+1)}$, $g'(x) = \dfrac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$ ed $f', g' < 0$ per $x > 3$. Si ha quindi che la serie associata ad $\alpha = -1/2$ converge perchè differenza di due serie convergenti per il criterio di Leibniz.

Esercizio 2. Determinare tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$z\overline{z}^2 = (|z|^2 + \overline{z}).$$

Soluzione. Usiamo la forma algebrica del numero complesso $z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ cercando di ricavare dall'equazione condizioni su a e b. Dato che $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e vale l'identità $z\bar{z} = |z|^2$, si riscrive l'equazione

$$(a^2 + b^2)(a - ib) = (a^2 + b^2) + a - ib$$

da cui si ricava subito (imponendo l'identità tra parti reali e parte immaginarie)

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)a &= (a^2 + b^2) + a \\ -(a^2 + b^2)b &= -b. \end{aligned}$$

La seconda equazione è vera quando $b = 0$ oppure se $b \neq 0$ si deve avere $a^2 + b^2 = 1$. In questo ultimo caso, imponendo $a^2 + b^2 = 1$ nella prima equazione si ha subito che a deve verificare l'equazione

$$a = 1 + a \quad (\text{ unita alla condizione } a^2 + b^2 = 1)$$

che non può essere mai verificata per nessun $a \in \mathbb{R}$. Rimane da vedere cosa accade nel caso $b = 0$. La prima equazione diventa

$$a^2 a = a^2 + a, \quad b = 0$$

verificata di sicuro per $a = 0$; nel caso $a \neq 0$ si semplifica e si ottiene che l'equazione in a diventa

$$a^2 = a + 1, \quad b = 0$$

ossia

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad b = 0.$$

Concludendo le soluzioni dell'equazione di partenza sono i 3 numeri reali

$$z_1 = 0, \; z_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \; z_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Esercizio 3. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$4y''(x) + y'(x) - 5y(x) = 9e^x + 5x - 1$$
$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Soluzione. Si tratta di una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti per cui le soluzioni dell'equazione omogenea sono determinate dalle radici di $4\lambda^2 + \lambda - 5 = 0$. Si ha che $4\lambda^2 + \lambda - 5 = 0$ quando $\lambda = 1, -\frac{5}{4}$, da cui le soluzioni dell'eq. omogenea hanno come base le funzioni $e^x, e^{-5x/4}$.

Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione. Dato che e^x è soluzione dell'eq. omogenea ma compare anche a secondo membro cerco una soluzione della forma $y_p(x) = Axe^x + Bx + C$, con A, B, C coefficienti reali da determinare. Sviluppando i calcoli si ottiene $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$. La soluzione generale è quindi data da

$$y(x) = xe^x - x + De^x + Ee^{-5x/4}, \quad \text{al variare di } D, E \in \mathbb{R}.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene il sistema

$$\begin{aligned} y(0) &= D + E = 0 \\ y'(0) &= D - \frac{5}{4}E = 0 \end{aligned}$$

che ha l'unica soluzione $D = 0 = E$. La soluzione cercata è quindi $y(x) = xe^x - x$.

Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema Y

21 febbraio 2018

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-n^{-\beta/2})\beta^n}{n^{1/2}+n^{\beta/2}}$$

al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Si procede in modo analogo alla prima versione e si ottiene, applicando il criterio della radice che la serie converge assolutamente per $|\beta| < 1$ mentre non converge per $|\beta| > 1$ (e diverge positivamente per $\beta > 1$). Per $\beta = 1$ la serie diventa una serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1-n^{-1/2}\right)}{2n^{1/2}}$$

che diverge per confronto asintotico con la serie di termine $1/\sqrt{n}$, ossia armonica di esponente $1/2$. Per $\beta = -1$ la serie diventa una serie a termini oscillanti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1-n^{1/2}\right)(-1)^n}{n^{1/2}+1/\sqrt{n}} = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(\sqrt{n}-1)\sqrt{n}}{n+1}.$$

Il termine a_n non converge a 0 per cui la serie non converge. (In particolare è indeterminata si può vedere come somma di una serie indeterminata e due serie oscillanti e convergenti per il criterio di Leibniz :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(\sqrt{n}-1)\sqrt{n}}{n+1} &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n-\sqrt{n}}{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}.\end{aligned}$$

dove l'ultima serie ha termine decrescente per quanto visto nella versione precedente).

Esercizio 2. Determinare tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$z\bar{z}^2 = (|z|^2 + z).$$

Soluzione. Usiamo la forma algebrica del numero complesso $z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ cercando di ricavare dall'equazione condizioni su a e b. Dato che $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e vale l'identità $z\bar{z} = |z|^2$, si ricrive l'equazione

$$(a^2 + b^2)(a - ib) = (a^2 + b^2) + a + ib$$

da cui si ricava subito (imponendo l'identità tra parti reali e parte immaginarie)

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)a &= (a^2 + b^2) + a \\ -(a^2 + b^2)b &= b. \end{aligned}$$

La seconda equazione è vera quando $b = 0$ perchè altrimenti si dovrebbe avere $a^2+b^2 = -1$ che è impossiibile per $a, b \in \mathbb{R}$. Imponiamo quindi la condizione $b = 0$ ed otteniamo che l'equazione di partenza è equivalente a

$$a^2 a = a^2 + a, \quad b = 0$$

L'equazione sopra è verificata di sicuro per $a = 0$; nel caso $a \neq 0$ si semplifica e si ottiene che l'equazione in a diventa

$$a^2 = a + 1, \quad b = 0$$

ossia

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad b = 0.$$

Concludendo le soluzioni dell'equazione di partenza sono i 3 numeri reali

$$z_1 = 0, \; z_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \; z_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Esercizio 3. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$4z''(x) + z'(x) - 5z(x) = 9e^x - 5x + 1$$
$$z(0) = 0, z'(0) = 1.$$

Soluzione. Si svolgono gli stessi calcoli dell'esercizio della versione precedente e si cerca quindi una soluzione particolare della forma $y_p(x) = Axe^x + Bx + C$, con A, B, C coefficienti reali da determinare. Sviluppando i calcoli si ottiene $A = 1$, $B = 1$, $C = 0$. La soluzione generale è quindi data da

$$y(x) = xe^x + x + De^x + Ee^{-5x/4}, \quad \text{al variare di } D, E \in \mathbb{R}.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene il sistema

$$\begin{aligned} y(0) &= D + E = 0 \\ y'(0) &= D - \frac{5}{4}E = 1 \end{aligned}$$

che ha l'unica soluzione $D = \dfrac{4}{9}, E = -\dfrac{4}{9}$. Se ne deduce che a soluzione cercata è data da $y(x) = xe^x + x + \dfrac{4}{9}(e^x - e^{-5x/4})$.