Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema 1

17 settembre 2018

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Stabilire il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n^n+1)}{\ln(2^{n!}+1)} - \frac{\ln(1+1/n^n)}{\ln(1+1/2^{n!})}$$

Soluzione.

La serie data è ottenuta come differenza di due serie a termini positivi. Consideriamo prima la serie con termine $a_n = \dfrac{\ln(n^n+1)}{\ln(2^{n!}+1)}$. Entrambi i termini tendono a $+\infty$ per cui raccogliamo l'infinito a fattore:

$$\ln(n^n+1) = \ln(n^n(1+1/n^n)) = n\ln(n) + \ln(1+1/n^n) = n\ln(n)(1+o(1)),$$

$$\ln(2^{n!}+1) = \ln(2^{n!}(1+1/2^{n!})) = n!\ln(2) + \ln(1+1/2^{n!}) = n!\ln(2)(1+o(1)).$$

per il teorema del confronto asintotico la serie si comporta come la serie con termine n-esimo $\dfrac{n\ln(n)}{n!\ln(2)}$ e questa converge per il criterio del rapporto.

Rimane da studiare la serie con termine $b_n = \dfrac{\ln(1+1/n^n)}{\ln(1+1/2^{n!})}$. Procediamo analogamente usando il fatto che

$$\ln\left(1+\frac{1}{n^n}\right) = \frac{1}{n^n}(1+o(1)), \quad \ln\left(1+\frac{1}{2^{n!}}\right) = \frac{1}{2^{n!}}(1+o(1))$$

e deduciamo per il teorema del confronto asintotico che la serie si comporta come la serie con termine n-esimo $\dfrac{1/n^n}{1/2^{n!}} = \dfrac{2^{n!}}{n^n}$.

Calcoliamo il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{(n+1)!}}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{2^{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{(n+1)!-n!}}{(n+1)^n} \frac{n^n}{(n+1)} = \frac{1}{e} \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n!n}}{(n+1)} = +\infty$$

e dal criterio del rapporto deduciamo che la serie associata a $b_n = \dfrac{\ln(1+1/n^n)}{\ln(1+1/2^{n!})}$ diverge a $+\infty$. Se ne conclude che la serie di partenza essendo somma di una serie che converge e di una che diverge (a ∞ visto il segno meno davanti) diverge negativamente.

Esercizio 2. Data la funzione

$$f(x) = \frac{\ln(4-x)}{x^2}$$

a) calcolare l'area compresa tra il grafico di f su $[2, 7/2]$ e l'asse x;
b) determinare (finito o infinito) il valore

$$\int_1^4 f(x)\, dx;$$

c) calcolare la primitiva F di f su $(-\infty, 0)$ tale che F vale 1 in $x = -4$;
d) tracciare un grafico approssimativo di F, determinandone i limiti agli estremi del dominio.

Soluzione.

a) Calcoliamo una primitiva di f su $(0, 4)$ (per cui $x > 0$ e $4 - x > 0$) integrando per parti

$$\int \frac{\ln(4-x)}{x^2}\, dx = -\frac{\ln(4-x)}{x} - \int \frac{1}{(4-x)x}\, dx$$

$$\int \frac{1}{(4-x)x}\, dx = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{4-x} + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{4}(\ln(x) - \ln(4-x))$$

si ha

$$\int \frac{\ln(4-x)}{x^2}\, dx = -\frac{\ln(4-x)}{x} + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{4-x}{x}\right) + c$$

da cui

$$\int_2^{7/2} \frac{\ln(4-x)}{x^2}\, dx = \frac{2}{7}\ln(2) - \frac{1}{4}\ln(7).$$

a) Usando il conto precedente si ha

$$\int_1^4 \frac{\ln(4-x)}{x^2}\, dx = \lim_{x\to 4-} \left(-\frac{\ln(4-x)}{x} + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{4-x}{x}\right)\right) + \frac{3}{4}\ln(3)$$

e, svolgendo i conti e raccogliendo,

$$\frac{\ln(4-x)}{x} - \frac{1}{4}(\ln(4-x) - \ln(x)) = \ln(4-x)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\ln(x)$$

$$= \frac{(4-x)\ln(4-x)}{4x} + \frac{1}{4}\ln(x)$$

da cui passando al limite si ottiene

$$\lim_{x\to 4-} \left(\frac{\ln(4-x)}{x} - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{4-x}{x}\right)\right) = 0 + \frac{1}{2}\ln(2)$$

e

$$\int_1^4 \frac{\ln(4-x)}{x^2}\, dx = \frac{3}{4}\ln(3) - \frac{1}{2}\ln(2).$$

c) Per calcolare la primitiva di f su $(-\infty, 0)$ si possono usare i conti di prima tenendo conto che stavolta $x < 0$ e $4 - x > 0$ per cui la primitiva di $1/x$ è $\ln(-x)$:

$$\int \frac{\ln(4-x)}{x^2}\, dx = -\frac{\ln(4-x)}{x} + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x-4}{x}\right) + c.$$

Imponendo che $F(-4) = 1$ si ha

$$F(x) = -\frac{\ln(4-x)}{x} + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x-4}{x}\right) - \ln(2) + 1.$$

d) Visto che f è strettamente positiva la funzione è strettamente crescente su $(-\infty, 0)$ e si calcola

$$\lim_{x \to 0-} F(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} F(x) = -\ln(2) + 1.$$

Esercizio 3. Data l'equazione differenziale

$$y' = 2x\sqrt{y} + 6\frac{y}{x}$$

i) determinarne le soluzioni che verificano la condizionale iniziale $y(1) = 4$;

ii) fare lo stesso per la condizione iniziale $y(1/3) = 0$.

Soluzione.

Si tratta di una equazione di Bernoulli, con soluzione banale $y = 0$ oppure che con soluzione y che si può calcolare riducendosi ad una eq. diff. lineare con il cambio $\sqrt{y} = v$. La funzione v cercata soddisfa $v' = x + 3v/x$. La soluzione dell'omogenea è cx^3 una soluzione particolare può essere ricercata come polinomio della forma $ax^2 + bx + c$ e si ottiene che $-x^2$ è una soluzione particolare. La soluzione generale della lineare è quindi $v(x) = cx^3 - x^2 = x^2(cx - 1)$ e quella dell'equazione iniziale è $x^4(cx - 1)^2$ sull'intervallo in cui $cx - 1 > 0$ oppure $y = 0$.

i) Stiamo cercando una soluzione che non è nulla nell'intorno del punto $x = 1$ per cui si può usare il cambio $\sqrt{y(x)} = v(x)$. Si ha quindi $v(1) = \sqrt{y(1)} = 2$ da cui $c = 3$. Si conclude poi che per $x > 1/3$ l'unica soluzione è $y(x) = (3x^3 - x^2)^2 = x^4(3x - 1)^2$: in effetti sugli intervalli dove $y \neq 0$ si può applicare il teorema di esistenza ed unicità locale di Cauchy che invece non vale quando $y(\bar{x}) = 0$ per qualche $\bar{x}$. (Si noti che se si imponeva subito $\sqrt{y(x)} = v(x)$, cioè $y(x) = (cx^3 - x^2)^2$, e si provava ad ottenere c sembrava che venissero due soluzioni possibili relative a $c = 3$ ed a $c = -1$. Si poteva poi verificare che la scelta relativa a $c = 1$, ossia la funzione $\tilde{y}(x) = (-x^3 - x^2)^2 = (x^3 + x^2)^2$ non soddisfaceva l'equazione. Il motivo per cui $c = 1$ non era possibile risiede anche nel fatto che la funzione v cercata deve essere positiva coincidendo con la radice di $y(x)$.) Concludendo l'unica soluzione su $(1/3, +\infty)$ è $y(x) = x^4(3x - 1)^2$ ma questa soluzione si può estendere in modo non unico a tutto R, vedi punto sotto.

ii) La soluzione $y = 0$ è di sicuro una soluzione possibile, una seconda possibilità è considerare la soluzione $\tilde{y}$ definita come 0 a sinistra di $1/3$ e $x^4(3x - 1)^2$ a destra di $1/3$. Infatti facendo il conto questa soluzione è derivabile anche in $x = 1/3$. In generale le soluzioni dell'equazione con dato iniziale $y(1/3) = 0$ sono infinite, basta attaccare alla funzione identicamente nulla una qualsiasi funzione $x^4(cx - 1)^2$ con $c > 3$.