Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema X

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{\alpha + x^2} e^{x-\alpha\sqrt{x^2+1}}\, dx$$

al variare del parametro $\alpha \geq 0$.

Soluzione. Si tratta di un integrale improprio sull'intervallo illimitato $(0, +\infty)$ di una funzione positiva. Controlliamo per prima cosa se la funzione data, al variare di $\alpha \geq 0$ è integrabile secondo Riemann su ogni intervallo $[0, M]$ o se presenta dei problemi su qualche sotto-intervallo $[0, M]$. Il denominatore $\alpha + x^2$ si annulla solo per $\alpha = 0$. Deduciamo che per $\alpha \neq 0$ la funzione è continua su $[0, M]$ per ogni $M > 0$. Nel caso $\alpha = 0$ la funzione assume la forma $0/0$ per cui ne facciamo il limite per $x \to 0$. Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} e^x = 1$$

da cui si deduce che f si può estendere con continuità in $x = 0$ ponendola uguale ad 1.

Dallo sviluppo di Taylor di $\sqrt{1+y}$ in $y = 0$ applicato con $y = 1/x^2$ si ottiene

$$x - \alpha\sqrt{x^2+1} = x - \alpha x\sqrt{1 + 1/x^2} = (1-\alpha)x - \alpha/2x + o(1/x) = (1-\alpha)x + o(1)$$

con $\lim_{x\to+\infty} o(1) = 0$, da cui si calcola che

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x-\alpha\sqrt{x^2+1}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } 0 \leq \alpha < 1. \end{cases}$$

Per confronto con la funzione $\dfrac{1}{x^2}$ l'integrale improprio sopra converge per $\alpha \geq 1$. Rimane da fare il caso $0 \leq \alpha < 1$. Per questo intervallo di valori di α l'integrale diverge positivamente. Per dimostrare questa affermazione, visto che $\sin^2(x)$ è una funzione π-periodica che si annulla, non basta usare il limite sopra. Si può fare una stima sostituendo l'intervallo $(0, +\infty)$ con l'unione degli intervalli su cui $\sin^2(x)$ è strettamente positiva, ad esempio maggiore od uguale a $1/2$. Risulta

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{\alpha + x^2} e^{x-\alpha\sqrt{x^2+1}}\, dx \geq \int_{\{x:\sin^2(x)\geq 1/2\}} \frac{\sin^2 x}{\alpha + x^2} e^{x-\alpha\sqrt{x^2+1}}\, dx \geq$$

$$\int_{\{x:\sin^2(x)\geq 1/2\}} \frac{1}{2(\alpha + x^2)} e^{x-\alpha\sqrt{x^2+1}}\, dx = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\pi/4+k\pi}^{3\pi/4+k\pi} \frac{1}{\alpha + x^2} e^{x-\alpha\sqrt{x^2+1}}\, dx \geq$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha + k^2\pi^2} \min_{[\pi/4+k\pi, 3\pi/4+k\pi]} e^{x-\alpha\sqrt{x^2+1}} \geq c\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha + k^2\pi^2} e^{(1-\alpha)k^2\pi^2}$$

dove la serie finale diverge perché per $\alpha < 1$ il termine a_k tende a $+\infty$.

Esercizio 2. Determinare tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$z^4 - \frac{3z^2}{(i-1)^4} = 0.$$

Soluzione. L'equazione si può riscrivere come

$$z^4 - \frac{3z^2}{(i-1)^4} = z^2\Big(z^2 - \frac{3}{(i-1)^4}\Big) = 0.$$

da cui si trova subito che $z_1 = 0$ è una soluzione. Rimangono da calcolare le radici complesse del numero $\dfrac{3}{(i-1)^4}$ e si ottiene

$$z_2 = \frac{\sqrt{3}}{(i-1)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{(i-1)^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Esercizio 3.

(1) Calcolare una primitiva di $\dfrac{1}{\ln(z)} - \dfrac{1}{\ln^2(z)}$.

(2) Determinare la soluzione di

$$y'(x)\ln^2(x+2) = y(x)(\ln(x+2)-1) \quad \text{tale che } \; y(0)=1.$$

(3) Trovare il dominio della soluzione e determinare esistenza e valore dei limiti agli estremi del dominio. Determinare poi le zone di monotonia di f determinandone eventuali massimi e minimi assoluti.

Soluzione. (1) Integrando per parti il primo addendo si ottiene

$$\int \frac{1}{\ln(z)}\,dz = \frac{z}{\ln(z)} - \int z\frac{1}{\ln^2(z)}\Big(-\frac{1}{z}\Big)\,dz = \frac{z}{\ln(z)} + \int \frac{1}{\ln^2(z)}\,dz$$

da cui

$$\int \frac{1}{\ln(z)}\,dz - \int \frac{1}{\ln^2(z)}\,dz = \frac{z}{\ln(z)} + c.$$

(2) Dato che $1/\ln(x+2)$ è una funzione ben definita e continua su $(0,+\infty)$, intervallo che contiene il punto iniziale è $x_0 = 0$, si può ridurre l'equazione in forma lineare omogenea e usare la formula risolutiva. Dal punto (1) si ha che $\frac{x+2}{\ln(x+2)}$ è una primitiva di $(\ln(x+2)-1)/\ln^2(x+2)$ e si ottiene

$$y'(x) = Ce^{(x+2)/\ln(x+2)}.$$

Imponendo $y(0)=1$ si deriva che la soluzione è $y(x) = e^{-2/\ln(2)}e^{(x+2)/\ln(x+2)}$.

(3) Il dominio della soluzione è l'intervallo $(-1,+\infty)$. Risulta

$$\lim_{x\to-1+} y(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty.$$

Poichè $y(x)>0$ sul suo dominio, usando l'equazione di cui è soluzione si ha poi

$$y'(x) = y(x)\frac{\ln(x+2)-1}{\ln^2(x+2)}, \text{ e } y'(x)>0 \text{ se e solo se } x > e-2.$$

Ne deriva che y è decrescente su $(-1, e-2)$, ha un minimo uguale a $e^{e-1/\ln(2)}$ in $e-2$ ed è crescente su $(e-2,+\infty)$. Non esistono massimi assoluti e $\sup y(x) = +\infty$.

Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema Y

5 febbraio 2018

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{\alpha + x^4} e^{x-\alpha \sqrt[3]{x^3+1}}\, dx$$

al variare del parametro $\alpha \geq 0$.

Soluzione. La risoluzione è del tutto analoga a quella del compito precedente. L'integrale converge se e solo se $\alpha \geq 1$.

Esercizio 2. Determinare tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$z^4 - \frac{5z^2}{(i+1)^4} = 0.$$

Soluzione. L'equazione si può riscrivere come

$$z^4 - \frac{5z^2}{(i+1)^4} = z^2\Big(z^2 - \frac{5}{(i+1)^4}\Big) = 0.$$

da cui si trova subito che $z_1 = 0$ è una soluzione. Rimangono da calcolare le radici complesse del numero $\dfrac{5}{(i+1)^4}$ e si ottiene

$$z_2 = \frac{\sqrt{5}}{(i+1)^2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}i, \qquad z_3 = -\frac{\sqrt{5}}{(i+1)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}i.$$

Esercizio 3.

(1) Calcolare una primitiva di $\dfrac{1}{\ln(z)} - \dfrac{1}{\ln^2(z)}$.

(2) Determinare la soluzione di

$$y'(x)\ln^2(x+1) = y(x)(\ln(x+1)-1) \qquad \text{tale che } \ y(1) = -1.$$

(3) Trovare il dominio della soluzione e determinare esistenza e valore dei limiti agli estremi del dominio. Determinare poi le zone di monotonia di f determinandone eventuali massimi e minimi assoluti.

Soluzione. (1) Integrando per parti il primo addendo si ottiene

$$\int \frac{1}{\ln(z)}\,dz = \frac{z}{\ln(z)} - \int z\frac{1}{\ln^2(z)}\Big(-\frac{1}{z}\Big)\,dz = \frac{z}{\ln(z)} + \int \frac{1}{\ln^2(z)}\,dz$$

da cui

$$\int \frac{1}{\ln(z)}\,dz - \int \frac{1}{\ln^2(z)}\,dz = \frac{z}{\ln(z)} + c.$$

(2) Dato che $1/\ln(x+1)$ è una funzione ben definita e continua su $(0,+\infty)$, intervallo che contiene il punto iniziale è $x_0 = 1$, si può ridurre l'equazione in forma lineare omogenea e usare la formula risolutiva. Dal punto (1) si ha che $\frac{x+1}{\ln(x+1)}$ è una primitiva di $(\ln(x+1)-1)/\ln^2(x+1)$ e si ottiene

$$y'(x) = Ce^{(x+1)/\ln(x+1)}.$$

Imponendo $y(1) = -1$ si deriva che la soluzione è $y(x) = -e^{-2/\ln(2)}e^{(x+1)/\ln(x+1)}$.
(3) Il dominio della soluzione è l'intervallo $(-1,+\infty)$. Risulta

$$\lim_{x\to 0+} y(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} y(x) = -\infty.$$

Poichè $y(x) < 0$ sul suo dominio, usando l'equazione di cui è soluzione si ha poi

$$y'(x) = y(x)\frac{\ln(x+1)-1}{\ln^2(x+1)} \quad \text{e } y'(x) > 0 \text{ se e solo se } x < e-1.$$

Ne deriva che y è crescente su $(0, e-1)$, ha un massimo assoluto uguale a $e^{e-2/\ln(2)}$ in $e-1$ ed è decrescente su $(e-1,+\infty)$. Non esistono minimi assoluti e $\inf y(x) = -\infty$.