Analisi Matematica I, Ingegneria (A.A. 2017/2018)
Esercizi svolti e da svolgere

* ——————————————————————— *

1. Equazioni e disuguaglianze lineari

1.1. Equazioni lineari.

Problema 1.1. *Risolvere l'equazione*

$$Ax = B,$$

in $\mathbb{R}$*. Qui* $A, B \in \mathbb{R}$ *sono parametri.*

Soluzione: I caso: Se $A \neq 0$, l'equazione ha unica soluzione $x = B/A$ per ogni $B \in \mathbb{R}$.

II caso: $A = 0$, abbiamo l'equazione $0x = B$.

Se $B = 0$ abbiamo $0x = 0$ e ogni $x \in \mathbb{R}$ é soluzione.

Se $B \neq 0$ abbiamo $0x = B \neq 0$ e l'equazione non ha soluzioni.

Problema 1.2. *Risolvere le seguente equazioni in* $\mathbb{R}$*, dove* x, y, z, u *sono incogniti e* $a, b, n, k \in \mathbb{R}$ *sono parametri.*

$$a) \quad (x-3)^3 + 1 = (x-3)(x^2+3x+9) - 9x(x-3),$$

$$b) \quad \frac{5x+2}{42} - \frac{5(x-8)}{36} = \frac{9}{14},$$

$$c) \quad 2\frac{2}{9}\left(\frac{x-3}{2} + \frac{3}{8}\right) - 3\frac{1}{4}\left(\frac{x}{9} - \frac{9}{26}\right) = \frac{6x-11}{8},$$

$$d) \quad \frac{(u-1)^2}{9} - \left(\frac{u+1}{3}\right)^2 = 1 - u,$$

$$e) \quad \frac{2z-9}{-6} - z = \frac{9-z}{10} + \frac{5z+3}{-15},$$

$$f) \quad \frac{3x-4}{0,2} + \frac{x-3}{1,4} = \frac{1+2x}{0,12},$$

$$g) \quad \frac{(x+\frac{1}{2})^2}{2} - \frac{(1\frac{1}{2}-2x)^2 + \frac{1}{8}}{3} - 1 = \frac{16x-5x^2}{6},$$

$$h) \quad \frac{x - \frac{x - \frac{x-2}{5}}{5}}{5} = 2,$$

$$i) \quad \frac{\frac{12x-13}{20} - \frac{3x+2}{5}}{2} = \frac{x+1}{0,4} + \frac{x+9}{-8},$$

$$j) \quad 3^6(x+3^5) = -3^{13},$$

$$k) \quad (24^3 - 16^2.54)y + 37.6^4 = -23.6^4,$$

$$l) \quad \frac{12^5.y - 13.12^4}{3^4.2^8} = 11,$$

$$m)\quad 5kx - 2k = 5 - x,$$

$$n)\quad 2n(nx-5) = 6n - 3x,$$

$$o)\quad (a+2)x = a^3 + 8,$$

$$p)\quad 4ay - 5b = 5 + 7y,$$

Risp. a) $x \in \emptyset$; b) $x = 26$; c) ogni $x \in \mathbb{R}$; d) $u = 1,8$; e) $z = 8/9$; f) $x = -32$; g) $x = -10$; h) $x = 12,$; i) $x = -0,8$; j) $x = -10.3^5$; k) $y \in \emptyset$; l) $y = 2$;

$$m) \begin{cases} x = (2k+5)/(5k+1), & \text{se } k \neq -1/5; \\ x \in \emptyset, & \text{se } k = -1/5; \end{cases}$$

n) $x = 16n/(2n^2+3)$;

$$o) \begin{cases} x = a^2 - 2a + 4, & \text{se } a \neq -2; \\ x \in \mathbb{R}, & \text{se } a = -2; \end{cases}$$

$$p) \begin{cases} y = (5b+5)/(4a-7), & \text{se } a \neq 7/4, b \in \mathbb{R}; \\ y \in \mathbb{R}, & \text{se } a = 7/4, b = -1; \\ y \in \emptyset, & \text{se } a = 7/4, b \neq -1. \end{cases}$$

1.2. **Disuguaglianze lineari.**

Problema 1.3. *Risolvere le disuguaglianze*

$$a)\quad Ax < B,$$

$$b)\quad Ax \leq B,$$

$$c)\quad Ax > B,$$

$$d)\quad Ax \geq B,$$

in $\mathbb{R}$. *Qui* $A, B \in \mathbb{R}$ *sono parametri.*

Soluzione a) $Ax < B$ **:** Caso I: $A > 0$, la soluzione é $x < B/A$.
Caso II: $A < 0$, la soluzione é $x > B/A$.
Caso III: $A = 0$, abbiamo $0x < B$. Se $B \leq 0$, allora $x \in \emptyset$. Se $B > 0$, alora ogni $x \in \mathbb{R}$ é soluzione.
Soluzione d) $Ax \geq B$**:** Caso I: $A > 0$, la soluzione é $x \geq B/A$.
Caso II: $A < 0$, la soluzione é $x \leq B/A$.
Caso III: $A = 0$, abbiamo $0x \geq B$. Se $B > 0$, allora $x \in \emptyset$. Se $B \leq 0$, alora ogni $x \in \mathbb{R}$ é soluzione.

Problema 1.4. *Risolvere le seguente disuguaglianze in* $\mathbb{R}$, *dove* x, y, z, u *sono incogniti e* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *sono parametri*

$$a)\quad x + (3x-1)(9x^2+3x+1) - (x-2)(x+2) > 4(7x^3+1) - x^2(x+1),$$

$$b)\quad (4x-5)^2 - (4x+3)(4x-3) + 9x \leq 9(x-9) + 35,$$

$$c)\quad \frac{2z+15}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{3+3z}{2}+1+z\right)\leq\frac{3z+2}{4}+z,$$

$$d)\quad \frac{5x+2}{3}-2(x+1)<\frac{-2x+7}{6},$$

$$e)\quad \frac{3u+4}{4}-\frac{-u}{-8}\geq\frac{5u-1}{6}-\frac{17-u}{-12},$$

$$f)\quad \frac{(x-\frac{1}{3})^2}{2}-\frac{(\frac{1}{4}-2x)^2+\frac{1}{16}}{3}\leq\frac{5(x+2)(2-x)}{6},$$

$$g)\quad \frac{x^3+1}{5}+\frac{x^2(1-2x)}{10}>\frac{x(2x-6)}{20}+\frac{3x+2}{10},$$

$$h)\quad \frac{3(1,2-1,5z)}{0,1}-\frac{3+7z}{0,04}>\frac{4,83+z}{0,03},$$

$$i)\quad \frac{10x-4}{0,6}-\frac{x+14}{0,2}<\frac{2x-32}{0,8},$$

$$j)\quad x^3-1-x(x^2-3)+6\geq 3(x-2),$$

$$k)\quad \frac{0,9-4y}{0,6}+\frac{3y-1,3}{2}\leq\frac{0,4-5y}{-0,3},$$

$$l)\quad \frac{5x-2}{4,5}-10<\frac{23-2x}{1\frac{1}{4}}-\frac{11x+1}{1\frac{4}{5}}+7,$$

$$m)\quad 5(x-1)^2+1\geq(5x-1)^2-5(2x+4)(2x-4),$$

$$n)\quad \frac{x+1}{\frac{2}{9}}-(x+1)-\frac{2-x}{7}\geq 36,$$

$$o)\quad \sqrt{3}x-2\leq 2x-\sqrt{3},$$

$$p)\quad (a-1)x>a^2+a-2,$$

$$q)\quad (b-3)^2y\geq(b-3)(a+1),$$

$$r)\quad (a-b)x>2a+b-3c.$$

Risp. a) $x\in(1;\infty)$; b) $x\in[2;\infty)$; c) $z\in[23/8;+\infty)$; d) $x\in\mathbb{R}$; e) $u\in[2;\infty)$; f)$x\in\mathbb{R}$; g) $x\in\emptyset$; h) $z\in(-\infty;-15/19)$; i) $x\in(-\infty;4)$; j) $x\in\mathbb{R}$; k) $y\in[0,1;+\infty)$; l) $x\in(-\infty;4)$; m) $x\in\emptyset$; n) $x\in[9;+\infty)$; o) $x\in[-1;+\infty)$;

$$p)\begin{cases} x>a+2, & \text{se } a>1;\\ x<a+2, & \text{se } a<1;\\ x\in\emptyset, & \text{se } a=1;\end{cases}$$

$$q)\begin{cases} y\geq\frac{a+1}{b-3}, & \text{se } b\neq 3, a\in\mathbb{R};\\ y\in\mathbb{R}, & \text{se } b=3, a\in\mathbb{R};\end{cases}$$

$$r)\begin{cases} x > \frac{2a+b-3c}{a-b}, & \text{se } a > b, a, b, c \in \mathbb{R};\\ x < \frac{2a+b-3c}{a-b}, & \text{se } a < b, a, b, c \in \mathbb{R};\\ x \in \emptyset, & \text{se } a = b, a \geq c\ a, b, c \in \mathbb{R};\\ x \in \mathbb{R}, & \text{se } a = b, a < c\ a, b, c \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Problema 1.5. *Trovare la somma di tutti numeri naturali in* $\mathbb{N}$*, che sono soluzioni della disuguaglianza*

$$x\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(x^2-15\frac{2}{9}\right) > \left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x^2+\frac{x}{3}+\frac{1}{9}\right)-\frac{1}{3}(x-1)^2.$$

Risp. $x \in (-\infty; 7)$, la somma é $1+2+3+4+5+6 = 21$.

Problema 1.6. *Verificare che il piu' grande numero in* $\mathbb{Z}$ *che é soluzione della disuguaglianza*

$$a)\quad 5(x-0,4)^2-(2x+1)(3x-0,1) \geq 0,04(14-25x^2)$$

non é soluzione della disuguaglianza

$$b)\quad (-3-5x)^2-\frac{(10x-1)^2}{4} < 2-\frac{35x-2}{4}.$$

Risp. a) $x \in (-\infty, 1/20], x = 0$, b) $x \in (-\infty; -1/7)$.

Problema 1.7. *Risolvere la disuguaglianza*

$$\frac{x(x-5)}{4}-2 > \frac{3x(x+1)}{2}-\frac{5x^2}{4}$$

e torvare il piú grande intero del tipo $2k, k \in \mathbb{Z}$ *che é una soluzione di questa disuguaglianza. Vedere se il numero*

$$a = -\frac{2^4.4^3}{22.2^2.(-4)^2}$$

é una soluzione della disuguaglianza.

Risp. $x \in (-\infty, -8/11)$, il piú grande numero che é soluzione é -2. Il numero $a = -8/11$ non e' soluzione della disuguaglianza.

Problema 1.8. *Risolvere la disuguaglianza*

$$\frac{5(x^2-1)}{4}-\frac{(x+1)(x-7)}{20}-\frac{6x(x-2)}{5} < 0,$$

e torvare il piú piccolo intero del tipo $k, k \in \mathbb{Z}$ *che non é soluzione di questa disuguaglianza. Vedere se il numero*

$$b = \frac{3^{m+2}+72.3^m}{27.3^{m+1}},\quad m \in \mathbb{N},$$

é una soluzione della disuguaglianza.

Risp. $x \in (-\infty; 1/3)$, il piú piccolo intero che non é soluzione é 1. Il numero $b = 1$ non é soluzione.

2. Equazioni e disuguaglianze di secondo grado

2.1. Equazioni di secondo grado. Eduazione di II grado é l'equazione del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

dove $a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$ sono parametri.

Problema 2.1. *Risolvere le seguenti equazioni nell'incognitá $x \in \mathbb{R}$*

$$a)\ ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0; \quad b)\ ax^2 + bx = 0,\ a \neq 0; \quad c)\ ax^2 + c = 0,\ a \neq 0.$$

Soluzione a) $ax^2 + bx + c = 0$**:** Sia

$$D = b^2 - 4ac$$

il discriminate dell'equazione. Le soluzioni sono
(1) $x_{1,2} = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ se $D > 0$;
(2) $x_1 = x = 2 = -\frac{b}{2a}$ se $D = 0$;
(3) $x \in \emptyset$ se $D < 0$.

Soluzione b) $ax^2 + bx = 0$**:** Rescriviamo l'equazione nella forma $x(ax + b) = 0$. Ne segue che le soluzioni sono $x_1 = 0$ e $x_2 = -b/2a$.

Soluzione c) $ax^2 + c = 0$**:** Rescriviamo l'equazione nella forma $x^2 = -c/a$. Le soluzioni sono
(1) $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$ se $-c/a \geq 0$;
(2) $x \in \emptyset$ se $-c/a < 0$.

Problema 2.2. *Risolvere le seguenti equazioni in $\mathbb{R}$*

$$a)\quad (1 - \sqrt{6})x = x^2, \quad b)\quad (x + 4)2x = \sqrt{6}.x, \quad c)\ 3y^2 - 2 = \sqrt{3},$$

$$d)\ y^2 + 2 = \sqrt{2}, \quad e)\ \frac{x^2 - 1,5}{\sqrt{2}} + \frac{x^2}{\sqrt{8}} = 1\frac{1}{2}, \quad f)\ 5x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$g)\ 4x^2 - 17x - 15 = 0, \quad h)\ -2x^2 - x - 1, \quad i)\ x^2 - 3x + 0,75 = 0,$$

$$j)\ x^2 - 4\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2} = 0, \quad k)\ 2y^2 - y + \sqrt{2} = 0, \quad \ell)\ 8x - 5 - 3x^2 = 0,$$

$$m)\quad -3x^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{5} = 0, \quad n)\ \sqrt{3} - \sqrt{5}x - 2x^2 = 0, \quad o)\ x^2 + \sqrt{3}x + 1 - \sqrt{3} = 0,$$

$$p)\ 2u^2 + (1 + \sqrt{2})u - \sqrt{2} = 0, \quad q)\ 3t^2 - (\sqrt{6} + 1)t + 1 = 0, \quad r)\ 4t^2 + 4t + 1 = 0,$$

$$s)\ t^2 + 2\sqrt{2}t + 2 = 0, \quad t)\ \frac{\sqrt{27}y^2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{3}} = 0, \quad u) x^2 - (6 + \sqrt{3})x + 6\sqrt{3} = 0,$$

$$v)\quad x^2 + (5 - \sqrt{10}x - 5\sqrt{10} = 0, \quad w)\ x^2 - (2a + 1)x + a^2 + a - 6 = 0,$$

$$ii)\quad ay^2 - (a^2 - 1)y - a = 0,\ a \neq 0, \quad pp)\ (a - 1)x^2 - 6ax + 9a - 1 = 0.$$

Risp. a) $x_1 = 0$ e $x_2 = 1 - \sqrt{6}$; b) $x_1 = 0$ e $x_2 = \sqrt{3/2} - 4$; c) $y_{1,2} = \pm\sqrt{(\sqrt{3} + 2)/3}$; d) $x \in \emptyset$; e) $x_{1,2} = \pm\sqrt{\sqrt{2} + 1}$; f) $x_1 = 1$ e $x_2 = -0,6$; g) $x_1 = 5$ e $x_2 = -3/4$; h) $x_1 = -1$ e $x_2 = -0,5$; i) $x_{1,2} = (3 \pm \sqrt{6})/2$; j) $x_1 = 3$ e $x_2 = 1,5$; k) $x \in \emptyset$; ℓ)$x_1 = 1$ e $x_2 = 5/3$; m) $x_{1,2} = (-\sqrt{2} \pm \sqrt{12\sqrt{5} + 2})/6$; n) $x_{1,2} = (-\sqrt{5} \pm \sqrt{8\sqrt{3} + 5})/4$; o) $x_{1,2} = (-\sqrt{3} \pm \sqrt{4\sqrt{3} - 1})/2$; p) $u_{1,2} = (-(1 + \sqrt{2}) \pm \sqrt{10\sqrt{2} + 3})/4$; q) $t \in \emptyset$; r) $t_{1,2} = -1/2$; s) $t_{1,2} = -\sqrt{2}$; t) $y_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{110}}{18}$;

u) $x_1 = 6$ e $x_2 = \sqrt{3}$, v) $x_1 = \sqrt{10}$ e $x_1 = -5$; w) $x_1 = a+3$ e $x_2 = a-2$; ii) $x_1 = a$ e $x_2 = 1/a$;

$$pp) \begin{cases} x \in \emptyset, & \text{se } a \in (-\infty; 1/10); \\ x_{1,2} = (3a \pm \sqrt{10a-1})/(a-1), & \text{se } a \in [1/10; 1) \cup (1, +\infty); \\ x = 4/3, & \text{se } a = 1. \end{cases}$$

Problema 2.3. *Come si possono decomporre i seguenti polinomi in* $\mathbb{R}$

$$a) \quad ax^2 + bx + c, a, b, c \neq 0, \quad b) ax^2 + bx, \quad a, b \neq 0, \quad c) ax^2 - c, \quad a, c \neq 0.$$

Soluzione a) $ax^2 + bx + c$**:** Se $D = b^2 - 4ac > 0$ abbiamo

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Se $D = 0$ abbiamo

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2, \quad x_1 = \frac{-b}{2a}.$$

Se $D < 0$ il polinomio é irreducibile.

Soluzione b) $ax^2 + bx$**:** Abbiamo $ax^2 + bx = x(ax + b)$.

Soluzione c) $ax^2 - c$**:**

$$ax^2 - c = \begin{cases} (\sqrt{a}x + \sqrt{c})(\sqrt{a}x - \sqrt{c}), & \text{se } a > 0, c > 0; \\ -(\sqrt{-a}x + \sqrt{-c})(\sqrt{-a}x - \sqrt{-c}), & \text{se } a < 0, c < 0; \\ \textit{irreducibile}, & \text{se } ac < 0. \end{cases}$$

Problema 2.4. *Come si possono decomporre i seguenti polinomi in* $\mathbb{R}$

$$a) \quad 5x^2 - \sqrt{3}x; \quad b) 2x^2 - 7; \quad c) \quad -3x^2 - 1; \quad d) \quad x^2 - 5x + 6;$$

$$e) \quad -x^2 - x + 20; \quad , f) \quad 2x^2 + 5x - 3; \quad g) - 5y^2 + 14y + 3; \quad h) \quad -2x^2 - x + 5;$$

$$i) \quad 4x - 4x^2 - 1; \quad j) \frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x + 4; \quad k) \quad 4 - x - x^2; \quad \ell) \quad -x^2 + (3 - \sqrt{2})x + 3\sqrt{2};$$

$$m) \quad x^2 + 3\sqrt{2}x + 5; \quad n) \quad -5x^2 + x - 1; \quad o) \quad y^3 - 2y - 15y.$$

Risp. a)$x(\sqrt{5}x - 3)$; b) $(\sqrt{2}x + \sqrt{7})(\sqrt{2}x - \sqrt{7})$ c) irredducibile; d) $(x-3)(x-2)$; e) $(4-x)(x+5)$; f) $(2x-1)(x+3)$; g) $(3-y)(5y+1)$; h) $-2(x+(1-\sqrt{41})/4)(x+(1+\sqrt{41})/4)$; i) $-2(x-1)^2$; j) $(2+x/3)^2$; k) $-(x+(1-\sqrt{17})/2)(x+(1+\sqrt{17})/2)$; ℓ)$(3-x)(x+\sqrt{2})$; m) non si puo decomporre; n) non si puo decomporre; o) $y(y+3)(y-5)$.

2.2. **Disequazioni di secondo grado** $ax^2 + bx + c \lesseqqgtr 0$, $a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$**.**

Problema 2.5. *Risolvere in* $\mathbb{R}$ *le seguente disequazioni*

$$a) \quad ax^2 + bx + c > 0, \quad b) \quad ax^2 + bx + c \geq 0, \quad c) \quad ax^2 + bx + c < 0, \quad d) \quad ax^2 + bx + c \leq 0.$$

Soggerimento: Sia

$$D = b^2 - 4ac.$$

Per il caso $a > 0$ poniamo

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

quando $D \geq 0$.Abbiamo $x_1 \leq x_2$ e la Fig. 1. Le soluzioni sono dati nella tabella 1.

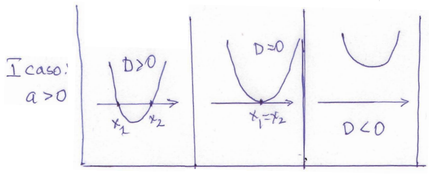

FIGURE 1. *Il caso $a > 0$.*

I caso: $a > 0$	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$ax^2 + bx + c > 0$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$	$x \in \mathbb{R}$
$ax^2 + bx + c \geq 0$	$x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$
$ax^2 + bx + c < 0$	$x \in (x_1; x_2)$	$x \in \emptyset$	$x \in \emptyset$
$ax^2 + bx + c \leq 0$	$x \in [x_1; x_2]$	$x = x_1$	$x \in \emptyset$

TABLE 1. Il caso $a > 0$.

Per il caso $a < 0$ poniamo

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

quando $D \geq 0$.Abbiamo $x_1 \leq x_2$ e la Fig. 2. Le soluzioni sono dati nella tabella 2.

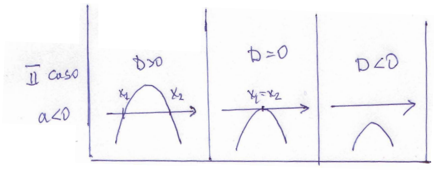

FIGURE 2. *Il caso $a < 0$.*

II caso: $a < 0$	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$ax^2 + bx + c > 0$	$x \in (x_1; x_2)$	$x \in \emptyset$	$x \in \emptyset$
$ax^2 + bx + c \geq 0$	$x \in [x_1; x_2]$	$x = x_1$	$x \in \emptyset$
$ax^2 + bx + c < 0$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$	$x \in \mathbb{R}$
$ax^2 + bx + c \leq 0$	$x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$

TABLE 2. Il caso $a > 0$.

Problema 2.6. *Risolvere in $\mathbb{R}$ le seguente disequazioni*

$$a) \quad x^2 \geq 0; \quad b) x^2 > 0; \quad c) x^2 < 0; \quad d) x^2 \leq 0; \quad e) 2x^2 + x - 1 \geq 0,$$
$$f) \quad -5x^2 < -2;$$

3. Equazioni e disuguaglianze:

Problema 3.1. *Risolvere le equazioni*

$$a)\quad 15x^3 + x^2 - 2x = 0,$$

$$b)\quad x^3 + 2x^4 + 4x^2 + 2 + x = 0,$$
$$c)\quad (1 + x^2)^2 = 4|x|(1 - x^2),$$
$$d)\quad ||3|x| - 1| - 5| = 2,$$

Problema 3.2. *Trovare p, q tale che le radici dell'equazione*

$$x^2 + px + q = 0$$

sono p e q.

Problema 3.3. *Per l'equazione*

$$x^2 + px + 12 = 0$$

sappiamo che le due radici x_1, x_2 soddisfano $x_1 - x_2 = 1$. Trovare p.

Problema 3.4. *Trovare per quali valori del parametro m l'equazione*

$$mx^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0,$$

ha due radici nel intervallo $(-2, 4)$.

Problema 3.5. *Trovare per quali valori del parametro m l'equazione*

$$x^2 - (1 - m^2)x - m = 0,$$

ha due radici nel intervallo $[-2, 2]$.

Problema 3.6. *Risolvere le disuguaglianze*

$$a)\quad |x| \leq \frac{1}{x-1},$$

$$|x - 1| + 2|x - 3| < 2,$$
$$b)\quad x^2 - |x| < 0,$$
$$c)\quad x^2 - 3|x| + 2 > 0,$$
$$d)\quad (1 + x)^2 < |1 - x^2|,$$
$$e)\quad x|x| - 4x + 3 < 0,$$
$$f)\quad \frac{x-1}{2x+1} > 0,$$
$$g)\quad \frac{x-1}{x} - \frac{x+1}{x-1} < 2,$$
$$h)\quad \frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{8}{x^2-1} < 0.$$

Risp. a) $x \in (1, (1 + \sqrt{5})/2]$, b) $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, c) $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, \infty)$, d) $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$, e) $x \in (-\infty, -2 - \sqrt{7}) \cup (1, 3)$, f) $x \in (-\infty, -1/2) \cup (1, \infty)$, g) $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1/2) \cup (1, \infty)$, h) $x \in (-2, -1) \cup (1, 3)$.

Problema 3.7. *Per quale valore del parametro a la disuguaglianza*

$$-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$$

e' vera per ogni x?

Risp. $a \in (-1, 2)$.

Problema 3.8. *Per quale valore del parametro a la disuguaglianza*

$$(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 1 > 0$$

e' vera per ogni x?

Risp. $a > 1$.

Problema 3.9. *Risolvere le equazioni*

$$a) \quad \sqrt{x} = \sqrt{-x},$$

$$a) \quad \sqrt{1 + x} = 2 - 3x,$$

$$b) \quad \sqrt{1 + 2x^2 + x^4} = 10,$$

Problema 3.10. *Risolvere le equazioni*

$$a) \quad \sqrt{4x^2 + 9x + 5} - \sqrt{2x^2 + x - 1} = \sqrt{x^2 - 1},$$

$$b) \quad x^2 + 5x + 4 - 5\sqrt{x^2 + 5x + 28} = 0,$$

$$c)^* \quad \sqrt{2x + 4} - 2\sqrt{2 - x} = \frac{12x - 8}{\sqrt{9x^2 + 16}}.$$

$$d) \quad \sqrt{x - 2 + \sqrt{2x - 5}} + \sqrt{x + 2 + 3\sqrt{2x - 5}} = 7\sqrt{2},$$

$$e) \quad \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}} = \frac{15}{8} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{15}},$$

$$f) \quad (x - 3)^2 + 3x - 22 = \sqrt{x^2 - 3x + 7},$$

$$g)^* \quad x^2 + \sqrt{x + 5} = 5,$$

Risp. a) $x = -1, 5$, b) $x = 4, -9$, c) $x = 2/3, 4\sqrt{2}/3$, d) $x = 15$, e) $x = 0, \pm 24/25$.

Problema 3.11. *Risolvere le disuguaglianze (compito Novembre 2006/2007)*

$$2 - \sqrt{x + 2} > \sqrt{2x + 5},$$

(compito Gennaio 2005)

$$x + \sqrt{x^2 + x - 2} > 0.$$

4. Esercizi su massimi e minimi

Problema 4.1. *Determinare il minimo, il massimo, l'estremo inferiore e l'estremo superiore (se esistono) degli insiemi*

$$\{x \in \mathbb{R} : |x^2+1| < |x-3| - 1\} \quad \{x \in \mathbb{R} : |x^2| < \left|x - \frac{3}{x}\right| - 1\}.$$

Problema 4.2. *Determinare il minimo, il massimo, l'estremo inferiore e l'estremo superiore (se esistono) degli insiemi*

$$\{x \in \mathbb{R} : |x^2-1| < |x+3| - 2\} \quad \{\frac{1}{n} + \sin\left((2m+1)\frac{\pi}{2}\right) : n, m \geq 1 \in \mathbb{N}\}.$$

Problema 4.3. *Determinare il minimo, il massimo, l'estremo inferiore e l'estremo superiore (se esistono) degli insiemi*

$$\{x \in \mathbb{R} : 4 > |1-x||1+x| + (1-x)^2\} \quad \left\{\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n - \cos(m\pi)} : n, m \geq 1 \in \mathbb{N}\right\}.$$

Problema 4.4. *Trovare l'intersezione $A \bigcap B$ dove*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^4 + |x-3| = \sin\left(x\frac{\pi}{2}\right)\}$$

e $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2\}$.

Problema 4.5. *Trovare l'estremo superiore, l'estremo inferiore, il massimo e il minimo di $A \bigcap B$ dove*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \left|x - \frac{1}{x} + 1\right| + x \leq \frac{1+x}{x}\}$$

and $B = \mathbb{Z}$.

Problema 4.6. *Trovare l'estremo superiore, l'estremo inferiore, il massimo e il minimo di $A \bigcap B$ dove*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + |x-1| < 2\}$$

and $B = \mathbb{Q}$.

Problema 4.7. *Trovare l'estremo superiore, l'estremo inferiore, il massimo e il minimo di $A \bigcap B$ dove*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| + |x+2| \leq 2|x-3|\}$$

and $B = \mathbb{Q}$.

Problema 4.8. *Trovare l'estremo superiore, l'estremo inferiore, il massimo e il minimo di tutti $x \in \mathbb{R}$ tale che esiste $y \in \mathbb{R}$ tale che*

$$|x+y| + y \leq 2.$$

5. Funzioni exp e log.

La funzione esponenziale $f(x) = a^x$ dove $a > 0, a \neq 1$ e definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Proprieta'

$$a^x > 0,\ a^x b^x = (ab)^x,\ a^0 = 1, a^{x+y} = a^x a^y,\ \ a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y},\ \ a^{-x} = \frac{1}{a^x}, (a^x)^y = a^{xy}$$

Definizione : $\log_a b$ e' definito per $a > 0, a \neq 1$, e $b > 0$.

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b.$$

Proprieta':

$$\log_a(b_1.b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2, a > 0, a \neq 1, b_1, b_2 > 0,$$

$$\log_a(b^d) = d \log_a b, a > 0, a \neq 1, b > 0, d \in \mathbb{R}.$$

$$\log_a b = \frac{\log_A b}{\log_A a},\ a, A > 0, a \neq 1, A \neq 1, b > 0.$$

Problema 5.1. *Risolvere le seguente equazioni*

$$a)\quad 4^x - 2^{x+2} - 32 = 0,$$

$$b)\quad \sqrt{3^{1/x}} - 3^{1/x} = 27,$$

$$c)\quad 4^{\sqrt{x^2-2}+x} = 6 + 5.2^{x-1+\sqrt{x^2-2}},$$

$$d)\quad 3.4^{\sqrt{x}-1} - 2.6^{\sqrt{x}-1} = 9^{\sqrt{x}-1},$$

$$e)\quad \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4.$$

$$f)\quad 9(9^x + 9^{-x}) - 3(3^x + 3^{-x}) = 72,$$

$$g)\quad 2^{|x+2|} - |2^{x+1} - 1| = 2^{x+1} + 1,$$

$$g)\quad 3^x 8^{x/(x+2)} = 6.$$

Risp. a) 3, d) 1, e) 2, -2, f) 1,-1, g) $x = -3$ o $x \in [-1, \infty)$.

Problema 5.2. *Risolvere le seguente equazioni*

$$a)\quad \lg(3x-8) + \lg(2-x) = 5,$$

$$b)\quad \lg_x(2x^2 - 5x + 6) = 2,$$

$$c)\quad x^{\lg_3(3x)} = 9,$$

$$d)\quad 2(\lg_2 x + \lg_x 2) = 5,$$

$$e)\quad \lg_2(x+1)^2 + \lg_2|x+1| = 6.$$

Risp. a) non c'e soluzione, b) 2,3, c) 1/9, 3, d) $\sqrt{2}, 4$

Problema 5.3. *Risolvere le seguente equazioni (a é un parametro reale)*

$$a) \quad \log_{a^2} x + \log_{x^2} a = 1,$$

$$b) \quad -\frac{5}{4} + \log_x(5\sqrt{5}) = \left(\log_{x^2} \sqrt{5}\right)^2,$$

$$c) \quad x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}.$$

Problema 5.4. *Trovare le soluzioni del sistema*

$$\left\{ \begin{array}{ll} xy = 40 & ; \\ x^{\lg y} = 4, & . \end{array} \right. \tag{1}$$

Risp. 10,4.

Problema 5.5. *Risolvere le seguente disuguaglianze*

$$a) \quad 3^{x+1/2} + 3^{x-1/2} \geq 4^{x+1/2} - 2^{2x-1},$$

$$b) \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x-1} \leq 3,$$

$$c) \quad \lg_{1/4}\left(\lg_{1/3} \frac{x}{x+1}\right) < 0,$$

$$d) \quad \lg\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| < 0,$$

$$e) \quad \lg_{x^2} |x-1| < 1.$$

Risp. a) $x \in (-\infty, 3/2]$, c) $x \in (-1/2, 0)$, d) $x \in (0, 1/2) \cup (1/2, 2)$.