**Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema X**

**Esercizio 1.** Al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$ determinare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{n+1}}{\sqrt[3]{\ln(n+1)}\sqrt{n^2+1}}\Big(1-2x\Big)^n$$

**Soluzione.** Detto $y = 1-2x$ studio la convergenza assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{n+1}}{\sqrt[3]{\ln(n+1)}\sqrt{n^2+1}} y^n.$$

Si noti che si tratta di una serie di potenze in $y$ con centro 0 e con termine

$$a_n = \frac{e^{n+1}}{\sqrt[3]{\ln(n+1)}\sqrt{n^2+1}},$$

per cui il raggio di convergenza è determinato dal reciproco del $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, se questo limite esiste. Se non si ragiona in termini di serie di potenze il calcolo dello stesso limite viene suggerito in vista di applicare il criterio della radice. Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{e^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} e\sqrt[n]{e} = e,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}\sqrt{\sqrt[n]{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sqrt[3]{\ln(n+1)}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{\sqrt[n]{\ln(n+1)}} = 1,$$

dove l'ultimo limite deriva dal confronto $1 \le \ln(n+1) \le n$ valido per $n \ge 2$, oppure usando il criterio del rapporto. Se ne deriva che la serie converge assolutamente per $|y| < \frac{1}{e}$, ossia $\frac{e-1}{2e} < x < \frac{e+1}{2e}$ e non converge per $|1-2x| > 1/e$.
Rimane da vedere cosa accade per $1-2x = \pm\frac{1}{e}$. Per $x = \frac{e-1}{2e}$ la serie è a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e}{\sqrt[3]{\ln(n+1)}\sqrt{n^2+1}}$$

che si può confrontare con la serie con termine $b_n = \frac{1}{\sqrt[3]{\ln(n)}n}$ sommata a partire da $n \ge 2$. Tale serie diverge per il criterio integrale.
Per $y = \frac{e+1}{2e}$ la serie diventa la serie a segno alterno

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{\ln(n+1)}\sqrt{n^2+1}}$$

Il suo termine $a'_n = \frac{1}{\sqrt[3]{\ln(n+1)}\sqrt{n^2+1}}$ è infinitesimo e decrescente per cui la serie converge per il criterio di Leibniz. Si può poi specificare che la serie diverge a $+\infty$ per $x < (e-1)/2e$ ed è indeterminata per $x > (e+1)/2e$.

**Esercizio 2.**

a) Calcolare

$$\int_{-2}^{1} \frac{|x+1|}{x^2+x-6}\,dx$$

b) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è finito

$$\int_{3}^{+\infty} \frac{|x+1|}{(x^2+x-6)^\alpha}\,dx$$

**Soluzione.** a) Si ha $x^2+x-6 = (x+3)(x-2)$ per cui il denominatore non si annulla su $[-2,1]$ e la funzione data è integrabile su $[-2,1]$ visto che è continua. Poichè $|x+1| = x+1$ su $[-1,+\infty)$ e $|x+1| = -x-1$ su $(-\infty,-1]$ si può scrivere

$$\int_{-2}^{1} \frac{|x+1|}{x^2+x-6}\,dx = -\int_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^2+x-6}\,dx + \int_{-1}^{1} \frac{x+1}{x^2+x-6}\,dx.$$

Rimane da calcolare una primitiva $h(x)$ di $(x+1)/(x^2+x-6)$. Si ha

$$\frac{x+1}{x^2+x-6} = \frac{2}{5}\Big(\frac{1}{x+3}\Big) + \frac{3}{5}\Big(\frac{1}{x-2}\Big),$$

da cui

$$\int \frac{|x+1|}{x^2+x-6}\,dx = \frac{2}{5}\ln(|x+3|) + \frac{3}{5}\ln(|x-2|) + c = h(x)$$

e

$$\int_{-2}^{1} \frac{|x+1|}{x^2+x-6}\,dx = -h(x)|_{-2}^{-1} + h(x)|_{-1}^{1} = \frac{6}{5}\ln\Big(\frac{2}{3}\Big).$$

b) Su $(3,+\infty)$ si ha $|x+1| = x+1$ e la funzione $x^2+x-6$ è sempre strettamente positiva, oltre che continua. Per stimare il suo integrale in senso improprio si può fare il confronto con la funzione $\dfrac{1}{x^{2\alpha-1}}$ e si ottiene che l'integrale esiste finito se e solo se $\alpha > 1$.

**Esercizio 3.**

(1) Determinare al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ la soluzione di

$$y'(x) = e^{-2y(x)}e^{2x} \quad \text{tale che } \; y(0) = \beta.$$

(2) Per $\beta = 1$ trovare il dominio della soluzione e determinare esistenza e valore di eventuali asintoti della funzione soluzione.

(3) Per $\beta = 1$ determinare le zone di convessità/concavità della funzione soluzione.

**Soluzione.** (1)Si tratta di una equazione a variabili separabili. Per ogni punto iniziale $y(0) = \beta$ il termine $e^{y(0)}$ non si annulla mai per cui si può riscrivere

$$e^{2y}\, dy = e^{2x}\, dx$$

ed integrare ottenendo

$$\frac{e^{2y}}{2} = \frac{e^{2x}}{2} + c$$

al variare della costante $c \in \mathbb{R}$, da cui $2y(x) = \ln(e^{2x} + c')$ per un'opportuna costante $c' \in \mathbb{R}$. Imponendo il dato iniziale si ha che la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{1}{2}\ln(e^{2x} + e^{2\beta} - 1).$$

(2) Il dominio della soluzione tale che $y(0) = 1$ è dato da

$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, e^{2x} > 1 - e^2\} = \mathbb{R},$$

dato che $1 - e^2 < 0$. Si ha poi

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = \frac{1}{2}\ln(e^2-1), \;\; \lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty, \;\; \lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^{2x} + e^2 - 1)}{2x} = \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Usando l'Hopital si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{2x}}{2(e^{2x} + e^2 - 1)} = 1$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} (y(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} (y(x) - \frac{1}{2}\ln(e^{2x})) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^{2x} + e^2 - 1}{e^{2x}}\right) = 0$$

Si conclude che $y(x)$ ha l'asintoto orizzontale $y = \ln(e^2 - 1)/2$ a $-\infty$ e l'asintoto obliquo $y = 2x$ a $+\infty$.

(3) Si calcola

$$y'(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x} + e^2 - 1)} \quad \text{e} \;\; y''(x) = \frac{2(e^2-1)e^{2x}}{(e^{2x} + e^2 - 1)^2},$$

da cui si deduce che $y$ è convessa su $\mathbb{R}$.

## Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema Y

15 gennaio 2018

**Esercizio 1.** Al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$ determinare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{\sqrt{\ln(n+1)}\sqrt[3]{n^3+1}}\Big(1-3x\Big)^n$$

**Soluzione.** Detto $y = 1-3x$ la risoluzione è analoga alla precedente per cui, attraverso considerazioni simili, si deduce la convergenza assoluta della serie per $|y| < \frac{1}{2}$, ossia $\frac{1}{6} < x < \frac{1}{2}$.

Per $x = \frac{1}{6}$ la serie diverge positivamente per confronto con la serie armonico-logaritimica con termine $b_n = \frac{1}{\sqrt{\ln(n)}n}$ che diverge per il criterio integrale.

Per $y = \frac{1}{2}$ la serie converge per il criterio di Leibniz (anche se non converge assolutamente).

Per $x < \frac{1}{6}$ la serie diverge positivamente (la serie è a termine positivi e il suo termine $a_n$ non è infinitesimo) e per $x > \frac{1}{2}$ è indeterminata (la serie è a termini di segno alterno e il suo termine $a_n$ non è infinitesimo).

**Esercizio 2.**

a) Calcolare

$$\int_{-1}^{3} \frac{|x-1|}{x^2-2x-8}\,dx$$

b) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è finito

$$\int_{6}^{+\infty} \frac{|x-1|}{(x^2-2x-8)^\alpha}\,dx$$

**Soluzione.** a) Si ha $x^2-2x-8=(x-4)(x+2)$ per cui il denominatore non si annulla su $[-1,3]$ e la funzione data è integrabile su $[-1,3]$ visto che è continua. Poichè $|x-1|=x-1$ su $[1,+\infty)$ e $|x+1|=1-x$ su $(-\infty,1]$ si può scrivere

$$\int_{-1}^{3} \frac{|x-1|}{x^2-2x-8}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1-x}{x^2-2x-8}\,dx + \int_{1}^{3} \frac{x-1}{x^2-2x-8}\,dx.$$

Rimane da calcolare una primitiva $h(x)$ di $(x-1)/(x^2-2x-8)$. Si ha

$$\int \frac{x-1}{x^2-2x-8}\,dx = \frac{1}{2}\ln(|x^2-2x-8|)+c = h(x)$$

e

$$\int_{-1}^{3} \frac{|x-1|}{x^2-2x-8}\,dx = -h(x)|_{-1}^{1} + h(x)|_{1}^{3} = \ln(5)-2\ln(3) = \ln\left(\frac{5}{9}\right).$$

b) Su $(6,+\infty)$ si ha $|x-1|=x-1$ e la funzione $x^2-2x-8$ è sempre strettamente positiva, oltre che continua. Per stimare il suo integrale in senso improprio si può fare il confronto con la funzione $\dfrac{1}{x^{2\alpha-1}}$ e si ottiene che l'integrale esiste finito se e solo se $\alpha>1$.

**Esercizio 3.**

(1) Determinare al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ la soluzione di
$$y'(x) = e^{3y(x)} e^{3x} \qquad \text{tale che} \ \ y(0) = \beta.$$

(2) Per $\beta = 1$ trovare il dominio della soluzione e determinare esistenza e valore di eventuali asintoti della funzione soluzione.

(3) Per $\beta = 1$ determinare le zone di convessità/concavità della funzione soluzione.

**Soluzione.** (1)Si tratta di una equazione a variabili separabili. Per ogni punto iniziale $y(0) = \beta$ il termine $e^{y(0)}$ non si annulla mai per cui si può riscrivere
$$e^{-3y}\, dy = e^{3x}\, dx$$
ed integrare ottenendo
$$\frac{-e^{-3y}}{3} = \frac{e^{3x}}{3} + c$$
al variare della costante $c \in \mathbb{R}$, da cui $-3y(x) = \ln(c' - e^{3x})$ per un'opportuna costante $c' \in \mathbb{R}$. Imponendo il dato iniziale si ha che la soluzione cercata è
$$y(x) = -\frac{1}{3} \ln(e^{-3\beta} + 1 - e^{3x}).$$

(2) Il dominio della soluzione tale che $y(0) = 1$ è dato da
$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, e^{3x} < e^{-3} + 1\} = (-\infty, \frac{1}{3} \ln(e^{-3} + 1)).$$
Si ha
$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = -\frac{1}{3} \ln(e^{-3} + 1), \qquad \lim_{x \to \ln(e^{-3}+1)/3} y(x) = +\infty.$$
Si conclude che $y(x)$ ha l'asintoto orizzontale $y = -\ln(e^{-3} + 1)/3$ a $-\infty$ e l'asintoto verticale $x = \dfrac{1}{3} \ln(e^{-3} + 1)$.

(3) Si calcola
$$y'(x) = \frac{3e^{3x}}{(e^{-3} + 1 - e^{3x})} \quad \text{e} \quad y''(x) = \frac{3(e^{-3} + 1)e^{3x}}{(e^{-3} + 1 - e^{3x})^2},$$
da cui si deduce che $y$ è convessa sul suo dominio $(-\infty, \dfrac{1}{3} \ln(e^{-3} + 1))$.