Prima prova in Itinere Ist. Mat. 1, Prima parte, Tema PIPPO

27 maggio 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:

1) La matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

A: ha rango 1; B: ha rango 2; C: ha rango 3 D: ha rango 0; E: N.A.

2) I vettori $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (-1, 2)$, $v_3 = (3, 0)$
A: sono ortogonali ; B: sono linearmente indipendenti ; C: N.A. ;
D: sono linearmente dipendenti; E: hanno norma 1.

3) Il sottoinsieme $V = \{(t - s, 3t, 3s) : t, s \in \mathbb{R}\}$ di $\mathbb{R}^3$ ha come base i vettori
A: $(1, 1, 0), (-1, 0, 1)$; B: $(3, 1, 0), (-3, 0, 1)$; C: $(1, 3, 0), (-1, 0, 1)$;
E: N.A. ; D: $(1, 3, 0), (-1, 0, 3)$.

4) Il sistema $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 3y - ax = 1 \end{cases}$
A: non ha mai soluzione; B: ha sempre soluzione; C: ha infinite soluzioni $\forall a \in \mathbb{R}$; D: ha soluzione unica $\forall a \in \mathbb{R}$; E: N.A.

5) Il limite per $t \to +\infty$ della soluzione di $u' = -u$ tale che $u(0) = -1$ vale
A: $+\infty$; B: $-\infty$; C: N.A. D: -2; E: 0.

6) La matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & -1 \end{pmatrix}$ è invertibile
A: mai; B: N.A.; C: $\forall a \in \mathbb{R}$; D: solo per $a \geq 0$; E: per $a \neq -1$.

7) Il valore dell'integrale $\int_0^1 xe^x \, dx$ è
A: $e - 1$; B: e ; C: 1 ; D: $e/2$; E: N.A.

8) I vettori $v = (b, b + 1, 0, -b), w = (1, 1 - b, b, -1)$ sono linearmente indipendenti
A: N.A.; B: solo per $b = 0$; C: solo per $b \neq 0$ D: $\forall b \in \mathbb{R}$; E: solo per $b \geq 0$.

	1	2	3	4	5	6	7	8
RISPOSTE	C	D	D	E	E	B	C	D

Prima prova in Itinere Ist. Mat. 1, Prima parte, Tema PAPERINO

27 maggio 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:

1) La matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & -1 \end{pmatrix}$ è invertibile
A: mai; B: N.A.; C: $\forall a \in \mathbb{R}$; D: solo per $a \geq 0$; E: per $a \neq -1$.

2) La derivata di $f(x) = \sqrt{1 + \cos^2(x)}$ in $x = \pi/4$ vale
A: 0; B: $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; C: N.A. D: $-\frac{1}{\sqrt{6}}$; E: 1.

3) Il limite per $t \to +\infty$ della soluzione di $u' = u$ tale che $u(0) = -1$ vale
A: $+\infty$; B: $-\infty$; C: N.A. D: -2; E: 1.

4) La matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

A: ha rango 1; B: ha rango 2; C: ha rango 3 D: ha rango 0; E: N.A.

5) I vettori $v_1 = (3, 1)$, $v_2 = (-1, 2)$, $v_3 = (0, 2)$
A: sono ortogonali ; B: sono linearmente indipendenti ; C: N.A. ;
D: sono linearmente dipendenti; E: hanno norma 1.

6) I vettori $v = (b, 1 - b, 0, -b), w = (1, b - 1, b, -1)$ sono linearmente indipendenti
A: N.A.; B: solo per $b = 0$; C: solo per $b \neq 0$ D: $\forall b \in \mathbb{R}$; E: solo per $b \geq 0$.

7) Il sistema $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2y - ax = 1 \end{cases}$
A: non ha mai soluzione; B: ha sempre soluzione; C: ha infinite soluzioni $\forall a \in \mathbb{R}$; D: ha soluzione unica $\forall a \in \mathbb{R}$; E: N.A.

8) Il sottoinsieme $V = \{(-s, 2t + 5s, 3s) : t, s \in \mathbb{R}\}$ di $\mathbb{R}^3$ ha come base i vettori
A: $(1, 5, 0), (-1, 0, 3)$; B: $(1, 5, 3), (0, 1, 0)$; C: $(-1, 2, 0), (0, 1, 1)$;
E: N.A. ; D: $(1, -5, -3), (0, 2, 0)$.

	1	2	3	4	5	6	7	8
RISPOSTE	E	D	B	B	D	D	E	D

Prima prova in Itinere Ist. Mat. 1, Prima parte, Tema TOPOLINO

27 maggio 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:

1) I vettori $v = (b, b+1, 0, -b), w = (1, b+1, b-1, -1)$ sono linearmente indipendenti
A: N.A.; B: solo per $b = 0$; C: solo per $b \neq 0$ D: $\forall b \in \mathbb{R}$; E: solo per $b \geq 0$.

2) La derivata di $f(x) = \sqrt{1 + \cos^2(x)}$ in $x = \pi/4$ vale
A: 0; B: $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; C: N.A. D: $-\frac{1}{\sqrt{6}}$; E: 1.

3) La matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

A: ha rango 1; B: ha rango 2; C: ha rango 3 D: ha rango 0; E: N.A.

4) I vettori $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (-1, 1)$, $v_3 = (2, 1)$
A: sono ortogonali ; B: sono linearmente indipendenti ; C: N.A. ;
D: sono linearmente dipendenti; E: hanno norma 1.

5) Se $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ allora z^3 è uguale a
A: -1 ; B: $e^{i\frac{2\pi}{3}}$; C: $1 - i$; D: i; E: N.A.

6) Il sottoinsieme $V = \{(t + s, 3t, 2t - s) : t, s \in \mathbb{R}\}$ di $\mathbb{R}^3$ ha come base i vettori
A: $(1, 3, 0), (-1, 0, 1)$; B: $(3, 1, 0), (-3, 0, 3)$; C: $(1, 3, 2), (-1, 0, 1)$;
E: N.A. ; D: $(1, 3, 0), (-2, -6, 0)$.

7) La matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$ è invertibile
A: mai; B: N.A.; C: $\forall a \in \mathbb{R}$; D: solo per $a \geq 0$; E: per $a \neq 1$.

8) Il sistema $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ ay - x = 1 \end{cases}$
A: non ha mai soluzione; B: ha sempre soluzione; C: ha infinite soluzioni $\forall a \in \mathbb{R}$; D: ha soluzione unica $\forall a \in \mathbb{R}$; E: N.A.

	1	2	3	4	5	6	7	8
RISPOSTE	A	D	C	D	A	C	B	E

Compito di Istituzioni di Matematica 1
Seconda parte, Tema A
27 maggio 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \text{-}1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \text{-}1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

calcolare le matrici $C = AB$, $D = BA$ e D^{-1}.
Determinare poi $h \in \mathbb{R}$ in modo tale che il sistema sotto abbia soluzione.

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_3 = 2 \\ 9x_1 + 5x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = h \end{cases}$$

Soluzione: Il prodotto AB è

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \text{-}3 \\ 9 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & \text{-}1 \end{pmatrix}.$$

Il prodotto BA è

$$D = \begin{pmatrix} 5 & \text{-}1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

e la sua inversa è

$$D^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \text{-}5 & 5 \end{pmatrix}.$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & \text{-}3 \\ 9 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & \text{-}1 \end{pmatrix}$$

ha determinante 0, mentre il minore dato dalle prime due righe e prime due colonne ha determinande 15, dunque la matrice ha rango 2 e la terza colonna è dipendente dalle prime due.

La matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 9 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & \text{h} \end{pmatrix}$$

ha determinante $15h - 15$, quindi ha rango 2 solo per $h = 1$. In particolare la matrice completa 3×4 ha rango 2 (visto che la terza colonna e' lin. dip. dalle prime due ogni altra sottomatrice 3×3 della completa ha determinante nullo, coerentemente al teorema delle orlate). Avendo la matrice AB rango 2, il sistema ha soluzione solo se la matrice completa ha anch'essa rango uguale a 2 e questo avviene solo per $h = 1$. Si conclude che il sistema ha soluzione solo per $h = 1$.

Esercizio 2. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x - y + (a-1)z = a+2 \\ x + (a-2)y + z = 4 \\ x - y + (a-2)z = a-1. \end{cases}$$

i) Determinare le soluzioni del sistema per $a = 1$.
ii) Discutere il numero di soluzioni del sistema al variare di a, determinando il particolare l'unico valore $\bar{a}$ per cui esistono infinite soluzioni del sistema sopra con $a = \bar{a}$.
iii) Per $\bar{a}$ definito sopra determinare una base dello spazio definito dalle equazioni:

$$\begin{cases} 2x - y + (\bar{a}-1)z = 0 \\ x + (\bar{a}-2)y + z = 0 \\ x - y + (\bar{a}-2)z = 0. \end{cases}$$

Soluzioni:

i) Per $a = 1$ la matrice associata al sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ed ha inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

dunque la soluzione è

$$A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(Si poteva altrimenti usare il metodo di eliminazione di Gauss per ricavare la soluzione).

ii) Il determinante di

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & a-1 \\ 1 & a-2 & 1 \\ 1 & -1 & a-2 \end{pmatrix}$$

è $a^2 - 5a + 6$ che si annulla per $a = 2$ e $a = 3$. Dunque per $a \neq 2, 3$ il sistema ha sempre soluzione (individuata dalla matrice inversa applicata al vettore termine noto).

Per $a = 2$ e $a = 3$ il rango della matrice associata è uguale a 2 (il minore delle prime due righe/colonne per $a = 2$ ha determinante 1 e per $a = 3$ ha determinante 3). In particolare la terza colonna è dipendente dalle prime due per entrambi i valori di a. Rimane da calcolare il rango della matrice completa. Il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & a+2 \\ 1 & a-2 & 4 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$$

è a^2-6a+9 che per $a=2$ è non nullo per cui per $a=2$ la matrice completa ha rango 3 ed il sistema non ha soluzione. Per $a=3$ invece il determinante sopra si annulla e questo garantisce che il rango della matrice completa è 2 (abbiamo visto sopra che le prime due colonne sono linearmente indipendenti per cui basta applicare il teorema delle orlate). Applicando il Teorema di Rouchè-Capelli si deduce che per $a=3$ il sistema ammette almeno una soluzione. In realta' per $a=3$ il sistema ha infinite soluzioni ottenute sommando ad una soluzione particolare una qualsiasi soluzione del sistema omogeneo che ha un insieme di soluzioni che è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione $3-rango=1$. Le soluzioni del sistema per $a=3$ sono quindi infinite per cui $\bar{a}=3$.

iii) L'esercizio chiede di calcolare l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo (ossia il Ker dell'applicazione associata alla matrice data per $a=3$). Da quanto visto sopra questo insieme ha dimensione 1 per cui basta trovare un elemento non nullo che vi appartiene: dato che la prima e la terza colonna della matrice sono uguali, $(1,0,-1)$ è una soluzione del sistema. Si deduce che lo spazio delle soluzioni è generato da $\{(1,0,-1)\}$ che ne è pertanto una base.

Esercizio 3. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si consideri l'applicazione lineare $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata alla matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 2k & 9 & 3k-9 \\ -k-1 & k-8 & 7-2k \\ 3k+1 & 3k-1 & 3k+2 \end{pmatrix}.$$

i) Verificare che esiste un unico valore k_0 di k per il quale T_k non è invertibile;
ii) trovare un generatore v_1 del nucleo di T_{k_0};
iii) trovare una base $\mathcal{B} = \{v_2, v_3\}$ dell'immagine di T_{k_0};
iv) stabilire se $\{v_1, v_2, v_3\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendente.

Soluzione:

i) Il determinante della matrice A_k è $36k$ e quindi si annulla solo per $k = 0$. Quindi $k_0 = 0$
ii) Per $k = 0$ la somma dell'opposto della prima colonna pi la seconda e la terza colonna di A_k è zero, quindi il vettore $(-1, 1, 1)$ appartiene al nucleo. Visto che il nucleo ha dimensione 1, questo è anche un generatore.
iii) Per $k = 0$ le prime due colonne di A_k sono indipendenti (infatti il minore con le prime due righe ha determinante 9). Quindi una base dell'immagine è data da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

iv) Il determinante di

$$\begin{pmatrix} 0 & 9 & -1 \\ -1 & -8 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

è 9, quindi l'insieme è linearmente indipendente.

Compito di Istituzioni di Matematica 1
Seconda parte, Tema B
27 maggio 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

calcolare le matrici $C = AB$, $D = BA$ e D^{-1}.
Determinare poi $h \in \mathbb{R}$ in modo tale che il sistema sotto abbia soluzione.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = h \end{cases}$$

Soluzione: Il prodotto AB è

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Il prodotto BA è

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

e la sua inversa è

$$D^{-1} = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

ha determinante 0, mentre il minore dato dalle prime due righe e prime due colonne ha determinande 4, dunque la matrice ha rango 2 e la terza colonna è dipendente dalle prime due.

La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & h \end{pmatrix}$$

ha determinante $4h + 7$, quindi ha rango 2 solo per $h = -\frac{7}{4}$. In particolare la matrice completa 3×4 ha rango 2 (visto che la terza colonna e' lin. dip. dalle prime due ogni altra sottomatrice 3×3 della completa ha determinante nullo, coerentemente al teorema delle orlate). Avendo la matrice AB rango 2, il sistema ha soluzione solo se la matrice completa ha anch'essa rango uguale a 2 e questo avviene solo per $h = -\frac{7}{4}$. Si conclude che il sistema ha soluzione solo per $h = -\dfrac{7}{4}$.

Esercizio 2. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare:

$$\begin{cases} (a-2)x + 2y - z = a+1 \\ (a-3)x + y - z = a-2 \\ x + y + (a-3)z = 4. \end{cases}$$

i) Determinare le soluzioni del sistema per $a = 2$.

ii) Discutere il numero di soluzioni del sistema al variare di a, determinando il particolare l'unico valore $\bar{a}$ per cui esistono infinite soluzioni del sistema sopra con $a = \bar{a}$.

iii) Per $\bar{a}$ definito sopra determinare una base dello spazio definito dalle equazioni:

$$\begin{cases} (\bar{a}-2)x + 2y - z = 0 \\ (\bar{a}-3)x + y - z = 0 \\ x + y + (\bar{a}-3)z = 0. \end{cases}$$

Soluzioni:

i) Per $a = 2$ la matrice associata al sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ed ha inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

dunque la soluzione è

$$A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ii) Il determinante di

$$\begin{pmatrix} a-2 & 2 & -1 \\ a-3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & a-3 \end{pmatrix}$$

è $-a^2 + 7a - 12$ che si annulla per $a = 3$ e $a = 4$. Dunque per $a \neq 3, 4$ il sistema ha sempre soluzione.

Per $a = 3$ e $a = 4$ le prime due colonne sono linearmente indipendenti (il minore di seconda e terza riga per $a = 3$ ha determinante -1 e per $a = 4$ ha determinante -3) e quindi la terza colonna è dipendente dalle prime due per entrambi i valori di a. Rimane da calcolare il rango della matrice completa. Il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} a-2 & 2 & a+1 \\ a-3 & 1 & a-2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

è $4-1$ che per $a=3$ è non nullo per cui per $a=3$ la matrice completa ha rango 3 ed il sistema non ha soluzione. Per $a=4$ invece il determinante sopra si annulla e questo garantisce che il rango della matrice completa è 2 (abbiamo visto sopra che le prime due colonne sono linearmente indipendenti per cui basta applicare il teorema delle orlate). Applicando il Teorema di Rouchè-Capelli si deduce che per $a=4$ il sistema ammette almeno una soluzione. In realta' per $a=4$ il sistema ha infinite soluzioni ottenute sommando ad una soluzione particolare una qualsiasi soluzione del sistema omogeneo che ha un insieme di soluzioni che è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione $3-rango=1$. Le soluzioni del sistema per $a=3$ sono quindi infinite per cui $\bar{a}=4$.

iii) L'esercizio chiede di calcolare l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo (ossia il Ker dell'applicazione associata alla matrice data per $a=4$). Da quanto visto sopra questo insieme ha dimensione 1 per cui basta trovare un elemento non nullo che vi appartiene: dato che la prima e la seconda colonna della matrice sono uguali, $(1,0,-1)$ è una soluzione del sistema. Si deduce che lo spazio delle soluzioni è generato da $\{(1,-1,0)\}$ che ne è pertanto una base.

Esercizio 3.

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si consideri l'applicazione lineare $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata alla matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 3k-2 & 3k-1 & 3k+1 \\ 3k+9 & 2k & -9 \\ 7+2k & k-1 & -k-8 \end{pmatrix}.$$

i) Verificare che esiste un unico valore k_0 di k per il quale T_k non è invertibile;
ii) trovare un generatore v_1 del nucleo di T_{k_0};
iii) trovare una base $\mathcal{B} = \{v_2, v_3\}$ dell'immagine di T_{k_0};
iv) stabilire se $\{v_1, v_2, v_3\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendente.

Soluzione:

i) Il determinante della matrice A_k è $-36k$ e quindi si annulla solo per $k = 0$. Quindi $k_0 = 0$
ii) Per $k = 0$ la somma di prima e terza colonna è uguale alla seconda colonna di A_k, quindi il vettore $(1, -1, 1)$ appartiene al nucleo. Visto che il nucleo ha dimensione 1, questo è anche un generatore.
iii) Per $k = 0$ le prime due colonne di A_k sono indipendenti (infatti il minore con le prime due righe ha determinante 9). Quindi una base dell'immagine è data da

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

iv) Il determinante di

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 9 & 0 & -1 \\ 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

è 9, quindi l'insieme è linearmente indipendente.