Prima prova in Itinere Ist. Mat. 1, Prima parte, Tema PIPPO

24 aprile 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:

1) Una primitiva di $x^5 e^{2x^3}$ è
A: $e^{2x^3}(2x^3-1)$; B: $e^{2x^3}(2x^5-1)-7$; C: $\frac{1}{12}e^{2x^3}(2x^3+1)$
D: $\frac{1}{12}e^{2x^3}(2x^3-1)+\sqrt{7}$; E: N.A.

2) Il valore dell'integrale $\int_0^\pi x\sin(x)\,dx$ è
A: π ; B:2 ; C: 0 ; D: $\pi/2$; E: N.A.

3) L'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{5x+10}{x^2+4x+5}\,dx$ è
A: $\dfrac{2}{5}\ln(x^2+2x+5)+c$; B: $\dfrac{5}{2}\ln(x^2+4x+5)+c$; C: $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)+c$;
E: N.A. ; D: $\dfrac{2}{5}\ln(x^2+4x+5)+c$.

4) Il volume del solido di rotazione int. all'asse x del sottografico di $\sqrt[4]{x^3}$, $x\in[0,3]$ è
A: $\dfrac{18}{5}\pi$; B: $\dfrac{5}{3}\pi$; C: $\dfrac{18\sqrt{3}}{5}\pi^2$; D: $\dfrac{18\sqrt{3}}{5}\pi$; E: N.A.

5) Il limite per $t\to+\infty$ della soluzione di $u'=-u^2t^{-3}$ tale che $u(1)=-1$ vale
A: $+\infty$; B: $-\infty$; C: N.A. D: -2; E: 1.

6) La funzione $|x-2|+3$, definita per $x\in[0,4]$ è
A: crescente; B: N.A.; C: integrabile; D: discontinua ; E: derivabile.

7) L'equazione differenziale $u'=\sin(x)u+2^x$
A: ha un'unica soluzione definita su $\mathbb{R}$; B: non ha soluzioni; C: N.A.;
D: ammette soluzioni non definite su tutto $\mathbb{R}$; E: ammette infinite soluzioni.

8) La derivata di $F(x)=\displaystyle\int_1^{-x}\cos(t^2)\,dt$ è
A: N.A.; B: $\cos(x^2)$; C: $-\sin(x^2)$ D: $-\cos(x^2)$; E: $-\cos(-x)$.

	1	2	3	4	5	6	7	8
RISPOSTE	D	A	B	D	D	C	E	D

Prima prova in Itinere Ist. Mat. 1, Prima parte, Tema PAPERINO

24 aprile 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:

1) Il valore dell'integrale $\int_0^\pi x\sin(x+\pi/2)\,dx$ è
A: π ; B:-2 ; C: 0 ; D: $\pi/2$; E: N.A.

2) L'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{5}{x^2+4x+5}\,dx$ è
A: $5\ln(x^2+4x+5)+c$; B: $\dfrac{5}{2}\ln(x^2+4x+5)+c$; C: $\dfrac{5}{2}\arctan(x+2)+c$;
E: N.A. ; D: $5\arctan(x+2)+c$.

3) Una primitiva di $4x^5e^{2x^3}$ è
A: $\frac{1}{3}e^{2x^3}(2x^3-1)+\sqrt{5}$; B: $4e^{2x^3}(2x^5-1)-1$; C: $\frac{1}{3}e^{2x^3}(2x^3+1)$
D: $4e^{2x^3}(2x^3-1)$; E: N.A.

4) Il volume del solido di rotazione int. all'asse x del sottografico di $\sqrt[3]{x^2}$, $x\in[0,2]$ è
A: $\dfrac{2\sqrt[3]{2}}{7}\pi$; B: π; C: $\dfrac{12}{7}\pi^2$; D: $\dfrac{3}{5}\pi$; E: N.A.

5) Il limite per $t\to+\infty$ della soluzione di $u'=-u^2t^{-4}$ tale che $u(1)=-1$ vale:
A: 1; B: $-\infty$; C: N.A. D: $-\dfrac{3}{2}$; E: $\dfrac{1}{2}$.

6) La funzione $1-|2x+1|$, definita per $x\in[-3,0]$ è
A: crescente; B: N.A.; C: integrabile; D: positiva ; E: derivabile.

7) L'equazione differenziale $u'=\sin(x^2)u-3^x$ con condizione iniziale $u(0)=1$
A: ha un'unica soluzione definita su $\mathbb{R}$; B: non ha soluzioni; C: N.A.;
D: ammette soluzioni non definite su tutto $\mathbb{R}$; E: ammette infinite soluzioni.

8) La derivata di $F(x)=\displaystyle\int_{2x}^{1}\cos(t^2)\,dt$ è
A: N.A.; B: $-\cos(4x^2)$; C: $-2\sin(x^2)$ D: $-2\cos(x^2)$; E: $-\cos(x)$.

	1	2	3	4	5	6	7	8
RISPOSTE	B	D	A	E	D	C	A	A

Prima prova in Itinere Ist. Mat. 1, Prima parte, Tema TOPOLINO

24 aprile 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:

1) Il valore dell'integrale $\int_0^\pi (x+1)\cos(x)\,dx$ è
A: -2 ; B:2 ; C: 0 ; D: $\pi/2$; E: N.A.

2) L'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{3}{x^2-4x+5}\,dx$ è
A: $\dfrac{2}{3}\ln(x^2-4x+5)+c$; B: $\ln(x^2-4x+5)+c$; C: $\dfrac{3}{2}\arctan(x-2)+c$;
E: N.A. ; D: $3\ln(x-2)+c$.

3) Il volume del solido di rotazione int. all'asse x del sottografico di $\sqrt[4]{x}$, $x\in[0,2]$ è
A: $\dfrac{4\sqrt{2}}{5}\pi$; B: $\dfrac{4}{3}\pi$; C: $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\pi$; D: 3π; E: N.A.

4) Il limite per $t\to+\infty$ della soluzione di $u'=-u^2t^{-3}$ tale che $u(1)=1$ vale
A: $+\infty$; B: $\frac{2}{3}$; C: N.A. D: -2; E: 1.

5) Una primitiva di $3x^5e^{2x^3}$ è
A: $3e^{2x^3}(2x^3-1)$; B: $3e^{2x^3}(2x^5-1)+9$; C: $\frac{1}{4}e^{2x^3}(2x^3+1)$
D: $\frac{1}{4}e^{2x^3}(2x^3-1)+\sqrt{2}$; E: N.A.

6) La funzione $2-|1-2x|$, definita per $x\in[-1,3]$ è
A: integrabile; B: N.A.; C: decrescente; D: discontinua ; E: derivabile.

7) L'equazione differenziale $u'=x\cos(x)u+e^x$, con condizione iniziale $u(0)=4$
A: ha un'unica soluzione definita su $\mathbb{R}$; B: non ha soluzioni; C: N.A.;
D: ammette soluzioni non definite su tutto $\mathbb{R}$; E: ammette infinite soluzioni.

8) La derivata di $F(x)=\displaystyle\int_1^{2x}\cos(t^2)\,dt$ è
A: N.A.; B: $2\cos(2x^2)$; C: $2\sin(2x^2)$ D: $2\cos(4x^2)$; E: $\cos(4x)$.

	1	2	3	4	5	6	7	8
RISPOSTE	A	E	C	B	D	A	A	D

Prima prova in Itinere Ist. Mat. 1, Prima parte, Tema PLUTO

24 aprile 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:

1) Il valore dell'integrale $\int_0^\pi (x+1)\sin(x)\,dx$ è
A: 2π ; B:2 ; C: 0 ; D: π; E: N.A.

2) L'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{3x-6}{x^2-4x+5}\,dx$ è
A: $\frac{2}{3}\ln(x^2-2x+5)+c$; B: $\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)+c$; C: $\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+5)+c$;
E: N.A. ; D: $\frac{2}{3}\ln(x^2-4x+5)+c$.

3) Il volume del solido di rotazione int. all'asse x del sottografico di $\sqrt[5]{x^3}$, $x \in [0,1]$ è
A: $\frac{11}{5}\pi$; B: $\frac{12}{5}\pi$; C: π; D: $\frac{5}{11}\pi$; E: N.A.

4) Il limite per $t \to +\infty$ della soluzione di $u' = -u^2 t^{-3}$ tale che $u(1) = -2$ vale
A: $+\infty$; B: $-\infty$; C: N.A. D: -2; E: 1.

5) La funzione $1 - |x|$, definita per $x \in [-1,3]$ è
A: crescente; B: N.A.; C: derivabile; D: discontinua ; E: integrabile.

6) L'equazione differenziale $u' = x^2\cos(x)u - 5x$, con condizione iniziale $u(0) = 0$
A: ha un'unica soluzione definita su $\mathbb{R}$; B: non ha soluzioni; C: N.A.;
D: ammette soluzioni non definite su tutto $\mathbb{R}$; E: ammette infinite soluzioni.

7) Una primitiva di $2x^5 e^{2x^3}$ è
A: $2e^{2x^3}(2x^3-1)$; B: $2e^{2x^3}(2x^5-1)-7$; C: $\frac{1}{6}e^{2x^3}(2x^3+1)$
D: $\frac{1}{6}e^{2x^3}(2x^3-1)+\sqrt{5}$; E: N.A.

8) La derivata di $F(x) = \displaystyle\int_x^1 \cos(t^2)\,dt$ è
A: N.A.; B: $-\cos(x^2)$; C: $\sin(x^2)$ D: $\cos(x^2)$; E: $\cos(x)$.

	1	2	3	4	5	6	7	8
RISPOSTE	E	C	D	B	E	A	D	B

Compito di Istituzioni di Matematica 1
Seconda parte, Tema A
24 aprile 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{\cos^3 x}{(\sin x + 2)^2}\, dx$$

e calcolare l'area di grafico compresa tra la funzione $f(x) = e^{-x}|x-2| + 3$ e $g(x) = \dfrac{\cos^3 x}{(\sin x + 2)^2}$ per x compreso tra 1 e 3.

Risoluzione.
Usando l'identità $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ e la sostituzione $\sin(x) = t$ si ottiene

$$\int \frac{\cos^3 x}{(\sin x + 2)^2}\, dx \quad \overset{\sin(x)=t}{=} \quad \int \frac{1-t^2}{(t+2)^2}\, dt,$$

vale a dire, se $F(t)$ è una primitiva di $\dfrac{1-t^2}{(t+2)^2}$, una primitiva di $\dfrac{\cos^3 x}{(\sin x + 2)^2}$ si ottiene come $F(\sin(x))$.
Facendo la divisione tra $1 - t^2$ e $(t+2)^2 = t^2 + 4t + 4$ si ha $1 - t^2 = -(t+2)^2 + 4t + 5$ da cui

$$\int \frac{1-t^2}{(t+2)^2}\, dt = \int \Big(-1 + \frac{4t+8}{(t+2)^2} - \frac{3}{(t+2)^2} \Big)\, dt = -t + 4\ln(|t+2|) + \frac{3}{t+2} + c.$$

Ne deriva

$$\int \frac{\cos^3 x}{(\sin x + 2)^2}\, dx = -\sin(x) + 4\ln(\sin(x) + 2) + \frac{3}{\sin(x) + 2} + c.$$

L'area compresa tra i grafici delle funzioni fe g è uguale a $\displaystyle\int_1^3 |f(x) - g(x)|\, dx$. Dato che $f(x) \geq 3$ e $g(x) \leq 1$, si ha $f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in [1,3]$ e si ottiene

$$\text{Area} = \int_1^3 |f(x) - g(x)|\, dx = \int_1^3 f(x)\, dx - \int_1^3 g(x)\, dx.$$

Da quanto visto sopra

$$\int_1^3 g(x)\, dx = \sin(1) - \sin(3) + 4\ln\Big(\frac{\sin(3)+2}{\sin(1)+2}\Big) + 3\frac{\sin(1) - \sin(3)}{(\sin(3)+2)(\sin(1)+2)}$$

e

$$\int_1^3 e^{-x}|x-2|\, dx = \int_2^3 e^{-x}(x-2)\, dx - \int_1^2 e^{-x}(x-2)\, dx = e^{-x}(1-x)|_2^3 - e^{-x}(1-x)|_1^2 = 2(e^{-2} - e^{-3}).$$

Esercizio 2. Discutere la convergenza o meno del seguente integrale generalizzato, giustificando le proprie affermazioni in base ai criteri studiati.

(1)
$$\int_0^1 f(x)dx$$

(2)
$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

dove, in entrambi i casi, $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x^{5/2}} \sin x$.

Risoluzione.

(1) La funzione $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x^{5/2}} \sin(x)$ è positiva e continua su $(0,1)$ ma non è limitata per cui è necessario discutere se è integrabile in senso generalizzato su $(0,1)$. Si ha

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{x^{-1/2}} = 1,$$

da cui, per il criterio del confronto visto a lezione, $\int_0^1 f(x)dx$ esiste finito se e solo se esiste finito $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ (infatti dal limite sopra $= 1$ si deduce che esistono due costanti positive $0 < c_1 < c_2$ tali che $c_1 x^{-1/2} \leq f(x) \leq c_2 x^{-1/2}$). Dato che $\frac{1}{\sqrt{x}}$ è integrabile in senso generalizzato su $(0,1)$ anche f lo è.

(2) La funzione $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x^{5/2}} \sin(x)$ è continua ma non è positiva sull'intervallo illimitato $(1,+\infty)$. Si può intanto vedere se $|f|$ è integrabile in senso generalizzato su $(1,+\infty)$ utilizzando anche stavolta il criterio del confronto. Si ha

$$0 \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{-2}} \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{1/2}} = 0,$$

da cui si deduce che esiste una costante positiva $0 < c$ tale che $|f(x)| \leq cx^{-2}$. Dato che $\dfrac{1}{x^2}$ è integrabile in senso generalizzato su $(1,+\infty)$ anche $|f|$ lo è e, usando il criterio di assoluta integrabilità visto a lezione, si ha che anche f è integrabile in senso generalizzato su $(1,+\infty)$.

Esercizio 3. Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$u'(t) - 2u(t) = e^{-t} \sin t, \qquad u(0) = \alpha.$$

e dimostrare che esiste un numero reale α_0 con questa proprietà:

(1) per $\alpha < \alpha_0$ la soluzione tende a $-\infty$ quando $t \to +\infty$;
(2) per $\alpha = \alpha_0$ la soluzione ha limite finito quando $t \to +\infty$;
(3) per $\alpha > \alpha_0$ la soluzione tende a $+\infty$ quando $t \to +\infty$.

Risoluzione.
Le soluzioni dell'equazione differenziale sopra sono date da $u(t) = e^{2t} v(t)$ dove v è l'integrale indefinito

$$v(t) = \int e^{-3t} \sin(t)\, dt.$$

Si calcola integrando per parti

$$\int e^{-3t} \sin(t)\, dt = -\frac{e^{-3t}}{10}(3\sin(t) + \cos(t)) + c,$$

da cui

$$u(t) = e^{2t}\Big(- \frac{e^{-3t}}{10}(3\sin(t) + \cos(t)) + c\Big).$$

Imponendo $u(0) = \alpha$ si ha

$$u(t) = -\frac{e^{-t}}{10}(3\sin(t) + \cos(t)) + \Big(\alpha + \frac{1}{10}\Big)e^{2t}.$$

Poiché

$$\lim_{t\to+\infty} -\frac{e^{-t}}{10}(3\sin(t) + \cos(t)) = 0,$$

si deduce

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = \begin{cases} +\infty & \alpha > -\frac{1}{10} \\ 0 & \alpha = -\frac{1}{10} \\ -\infty & \alpha < -\frac{1}{10} \end{cases}$$

e $\alpha_0 = -\dfrac{1}{10}$.

Compito di Istituzioni di Matematica 1
Seconda parte, Tema B
24 aprile 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{\sin^3 x}{(\cos x+3)^2} dx$$

e calcolare l'area di grafico compresa tra la funzione $f(x) = e^x|x+2|+3$ e $g(x) = \dfrac{\sin^3 x}{(\cos x+3)^2}$ per x compreso tra -3 e -1.

Risoluzione.
Usando l'identità $1-\cos^2(x) = \sin^2(x)$ e la sostituzione $\cos(x) = t$ si ottiene

$$\int \frac{\sin^3 x}{(\cos x+3)^2}\, dx \quad \overset{\cos(x)=t}{=} \quad \int \frac{t^2-1}{(t+3)^2}\, dt,$$

vale a dire, se $F(t)$ è una primitiva di $\dfrac{t^2-1}{(t+3)^2}$, una primitiva di $\dfrac{\sin^3 x}{(\cos x+3)^2}$ si ottiene come $F(\cos(x))$.
Facendo la divisione tra t^2-1 e $(t+3)^2 = t^2+6t+9$ si ha $t^2-1 = (t+3)^2-6t-10$ da cui

$$\int \frac{t^2-1}{(t+3)^2}\, dt = \int \left(1 - \frac{6t+18}{(t+3)^2} + \frac{8}{(t+3)^2}\right) dt = t - 6\ln(|t+3|) - \frac{8}{t+3} + c.$$

Ne deriva

$$\int \frac{\sin^3 x}{(\cos x+3)^2}\, dx = \cos(x) - 6\ln(\cos(x)+3) - \frac{8}{\cos(x)+3} + c.$$

L'area compresa tra i grafici delle funzioni fe g è uguale a $\displaystyle\int_{-3}^{-1} |f(x)-g(x)|\, dx$. Dato che $f(x) \geq 3$ e $g(x) \leq 1$, si ha $f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in [-3,-1]$ e si ottiene

$$\text{Area} = \int_{-3}^{-1} |f(x)-g(x)|\, dx = \int_{1}^{3} f(x)\, dx - \int_{-3}^{-1} g(x)\, dx.$$

Da quanto visto sopra

$$\int_{-3}^{-1} g(x)\, dx = \cos(1) - \cos(3) + 6\ln\left(\frac{\cos(3)+3}{\cos(1)+3}\right) + 8\frac{\cos(1)-\cos(3)}{(\cos(3)+3)(\cos(1)+3)}$$

e

$$\int_{-3}^{-1} e^x|x+2|\, dx = \int_{-2}^{-1} e^x(x-2)\, dx - \int_{-3}^{-2} e^{-x}(x-2)\, dx = e^x(x+1)|_{-2}^{-1} - e^x(x+1)|_{-3}^{-2} = 2(e^{-2}-e^{-3}).$$

Esercizio 2. Discutere la convergenza o meno del seguente integrale generalizzato, giustificando le proprie affermazioni in base ai criteri studiati.

(1)
$$\int_0^1 f(x)dx$$

(2)
$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

dove, in entrambi i casi, $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x^{7/2}} \sin x$.

Risoluzione.

(1) La funzione $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x^{7/2}} \sin(x)$ è positiva e continua su $(0,1)$ ma non è limitata per cui è necessario discutere se è integrabile in senso generalizzato su $(0,1)$. Si ha

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{x^{-3/2}} = 1,$$

da cui, per il criterio del confronto visto a lezione, $\int_0^1 f(x)dx$ esiste finito se e solo se esiste finito $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ (infatti dal limite sopra $= 1$ si deduce che esistono due costanti positive $0 < c_1 < c_2$ tali che $c_1 x^{-3/2} \leq f(x) \leq c_2 x^{-3/2}$). Dato che $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ non è integrabile in senso generalizzato su $(0,1)$ neanche f lo è, vale a dire

$$\int_0^1 f(x)dx = +\infty.$$

(2) La funzione $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x^{7/2}} \sin(x)$ è continua ma non è positiva sull'intervallo illimitato $(1,+\infty)$. Si può intanto vedere se $|f|$ è integrabile in senso generalizzato su $(1,+\infty)$ utilizzando anche stavolta il criterio del confronto. Si ha

$$0 \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{-2}} \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{3/2}} = 0,$$

da cui si deduce che esiste una costante positiva $0 < c$ tale che $|f(x)| \leq cx^{-2}$. Dato che $\dfrac{1}{x^2}$ è integrabile in senso generalizzato su $(1,+\infty)$ anche $|f|$ lo è e, usando il criterio di assoluta integrabilità visto a lezione, si ha che anche f è integrabile in senso generalizzato su $(1,+\infty)$.

Esercizio 3. Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$u'(t) + 2u(t) = e^t \cos t, \qquad u(0) = \alpha.$$

e dimostrare che esiste un numero reale α_0 con questa proprietà:

(1) per $\alpha < \alpha_0$ la soluzione tende a $-\infty$ quando $t \to -\infty$;
(2) per $\alpha = \alpha_0$ la soluzione ha limite finito quando $t \to -\infty$;
(3) per $\alpha > \alpha_0$ la soluzione tende a $+\infty$ quando $t \to -\infty$.

Risoluzione.
Le soluzioni dell'equazione differenziale sopra sono date da $u(t) = e^{-2t}v(t)$ dove v è l'integrale indefinito

$$v(t) = \int e^{3t} \cos(t)\, dt.$$

Si calcola integrando per parti

$$\int e^{3t} \cos(t)\, dt = \frac{e^{3t}}{10}(\sin(t) + 3\cos(t)) + c,$$

da cui

$$u(t) = e^{-2t}\Big(\frac{e^{3t}}{10}(\sin(t) + 3\cos(t)) + c\Big).$$

Imponendo $u(0) = \alpha$ si ha

$$u(t) = \frac{e^t}{10}(\sin(t) + 3\cos(t)) + \Big(\alpha - \frac{3}{10}\Big)e^{-2t}.$$

Poiché

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{e^t}{10}(\sin(t) + 3\cos(t)) = 0,$$

si deduce

$$\lim_{t\to-\infty} u(t) = \begin{cases} +\infty & \alpha > \frac{3}{10} \\ 0 & \alpha = \frac{3}{10} \\ -\infty & \alpha < \frac{3}{10} \end{cases}$$

e $\alpha_0 = \dfrac{3}{10}$.