Compito di Istituzioni di Matematica 1
Prima parte, Tema ALFA
6 settembre 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:

1) L'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ data da

$$f(x, y, z) = (x - kz, 3x + 2y + z, x + z, 2x + y + z)$$

è iniettiva
A: sempre; B: mai; C: per $k \neq -1$ D: per $k \neq 0$; E: N.A.

2) I vettori $v = (2, 2, \lambda, -1)$ e $w = (\lambda, 1, \lambda, 1)$ sono ortogonali:
A: sempre; B: per $\lambda = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$; C: N.A. ; D: per nessun $\lambda \in \mathbb{R}$; E: per $\lambda = -1$.

3) La funzione $y = 1 - e^{-x^2}$ definita per $x \in \mathbb{R}$ è
A: iniettiva; B: limitata; C: convessa; D: N.A.; E: concava.

4) La derivata della funzione $\cos(\pi \cos(\sin(x)))$ in $x = 0$ è uguale a
A: $-\pi/2$; B: π; C: 0; D: -1; E: N.A.

5) Tirando 3 volte di seguito un dado a 6 facce quanti sono i casi in cui si ottengono tre valori tutti diversi tra loro:
A: 120; B: 216; C: N.A. D: 20; E: 6.

6) L'equazione $z^3 = -8$
A: ha infinite soluzioni; B: N.A.; C: non ha soluzioni reali;
D: ha due soluzioni con parte reale 1; E: ha una soluzione con parte reale $\sqrt{3}$.

7) Il valore dell'integrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$ è
A: 0 ; B: -1 ; C: $1/2$; D: 1; E: N.A.

8) Il dominio della funzione $f(x) = \ln(x^2 - 3)$ è dato dagli x tali che
A: $x \leq \sqrt{3}$; B: $x > -\sqrt{3}$; C: $|x| < \sqrt{3}$ D: $|x| > \sqrt{3}$; E: N.A.

	1	2	3	4	5	6	7	8
RISPOSTE	C	E	B	C	A	D	A	D

Compito di Istituzioni di Matematica 1
Prima parte, Tema BETA
6 settembre 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:

1) L'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ data da
$$f(x, y, z) = (x - kz, 3x + 2y + z, x + z, 2x + y + 2z)$$
è iniettiva
A: sempre; B: mai; C: per $k \neq -1$ D: per $k \neq 0$; E: N.A.

2) I vettori $v = (1, 2, \lambda, -1)$ e $w = (\lambda, 1, \lambda, 1)$ sono ortogonali:
A: sempre; B: per $\lambda = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$; C: N.A. ; D: per nessun $\lambda \in \mathbb{R}$; E: per $\lambda = \sqrt{-3}$.

3) La funzione $y = e^{-x^2}$ definita per $x \in \mathbb{R}$ è
A: convessa; B: concava; C: limitata; d: N.A.; E: iniettiva.

4) La derivata della funzione $\sin(\pi \cos(\sin(x)))$ in $x = 0$ è uguale a
A: $-\pi$; B: 0; C: 1; D: $-\pi/2$; E: N.A.

5) Tirando 4 volte di seguito un dado a 6 facce quanti sono i casi in cui si ottengono quattro valori tutti diversi tra loro:
A: 20; B: 360; C: N.A. D: 15; E: 6.

6) L'equazione $z^3 = 8$
A: ha infinite soluzioni; B: N.A.; C: non ha soluzioni reali;
D: ha due soluzioni con parte reale 1; E: ha una soluzione con parte reale $\sqrt{3}$.

7) Il valore dell'integrale $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{(\sin(x)+1)^2}\,dx$ è
A: $2(\sqrt{2}+1)$; B: $\sqrt{2}+1$; C: $1/2$; D: N.A.; E: $\sqrt{2}-1$

8) Il dominio della funzione $f(x) = \ln(2 - x^2)$ è dato dagli x tali che
A: $x \leq \sqrt{2}$; B: $x > -\sqrt{2}$; C: $|x| < \sqrt{2}$ D: $|x| > \sqrt{2}$; E: N.A.

	1	2	3	4	5	6	7	8
RISPOSTE	A	D	C	B	B	B	E	C

Compito di Istituzioni di Matematica 1
Prima parte, Tema GAMMA
6 settembre 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:

1) L'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ data da
$$f(x, y, z) = (x - kz, 3x + 2y + z, x + z, 2x + y + z)$$
è iniettiva
A: sempre; B: mai; C: per $k \neq -1$ D: per $k \neq 0$; E: N.A.

2) I vettori $v = (1, 2, \lambda, -1)$ e $w = (\lambda, 1, \lambda, 1)$ sono ortogonali:
A: sempre; B: per $\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$; C: N.A. ; D: per nessun $\lambda \in \mathbb{R}$; E: per $\lambda = \sqrt{-3}$.

3) La funzione $y = e^{-x^2}$ definita per $x \in \mathbb{R}$ è
A: convessa; B: concava; C: limitata; d: N.A.; E: iniettiva.

4) La derivata della funzione $\cos(\pi \cos(\sin(x)))$ in $x = 0$ è uguale a
A: $-\pi/2$; B: π; C: 0; D: -1; E: N.A.

5) Tirando 3 volte di seguito un dado a 6 facce quanti sono i casi in cui si ottengono tre valori tutti diversi tra loro:
A: 20; B: 6; C: N.A. D: 120; E: 216.

6) L'equazione $z^3 = -8$
A: ha infinite soluzioni; B: N.A.; C: non ha soluzioni reali;
D: ha due soluzioni con parte reale 1; E: ha una soluzione con parte reale $\sqrt{3}$.

7) Il valore dell'integrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{x^4 + 1}}\, dx$ è
A: 0 ; B: -1 ; C: $1/2$; D: 1; E: N.A.

8) Il dominio della funzione $f(x) = \ln(2 - x^2)$ è dato dagli x tali che
A: $x \leq \sqrt{2}$; B: $x > -\sqrt{2}$; C: $|x| < \sqrt{2}$ D: $|x| > \sqrt{2}$; E: N.A.

	1	2	3	4	5	6	7	8
RISPOSTE	C	D	C	C	D	D	A	C

Compito di Istituzioni di Matematica 1
Prima parte, Tema DELTA
6 settembre 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:

1) L'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ data da
$$f(x, y, z) = (x - kz, 3x + 2y + z, x + z, 2x + y + 2z)$$
è iniettiva
A: sempre; B: mai; C: per $k \neq -1$ D: per $k \neq 0$; E: N.A.

2) I vettori $v = (2, 2, \lambda, -1)$ e $w = (\lambda, 1, \lambda, 1)$ sono ortogonali:
A: sempre; B: per $\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$; C: N.A. ; D: per nessun $\lambda \in \mathbb{R}$; E: per $\lambda = -1$.

3) La funzione $y = 1 - e^{-x^2}$ definita per $x \in \mathbb{R}$ è
A: iniettiva; B: limitata; C: convessa; D: N.A.; E: concava.

4) La derivata della funzione $\sin(\pi \cos(\sin(x)))$ in $x = 0$ è uguale a
A: $-\pi$; B: 0; C: 1; D: $-\pi/2$; E: N.A.

5) Tirando 4 volte di seguito un dado a 6 facce quanti sono i casi in cui si ottengono quattro valori tutti diversi tra loro:
A: 20; B: 6; C: 15; D: N.A.; E: 360.

6) L'equazione $z^3 = 8$
A: ha infinite soluzioni; B: N.A.; C: non ha soluzioni reali;
D: ha due soluzioni con parte reale 1; E: ha una soluzione con parte reale $\sqrt{3}$.

7) Il valore dell'integrale $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{(\sin(x) + 1)^2}\, dx$ è
A: $2(\sqrt{2} + 1)$; B: $\sqrt{2} + 1$; C: $1/2$; D: N.A.; E: $\sqrt{2} - 1$.

8) Il dominio della funzione $f(x) = \ln(x^2 - 3)$ è dato dagli x tali che
A: $x \leq \sqrt{3}$; B: $x > -\sqrt{3}$; C: $|x| < \sqrt{3}$ D: $|x| > \sqrt{3}$; E: N.A.

	1	2	3	4	5	6	7	8
RISPOSTE	A	E	B	B	E	B	E	D

Compito di Istituzioni di Matematica 1–Seconda parte, Tema A

6 settembre 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1.

Al variare di $t \in \mathbb{R}$ consideriamo l'applicazione lineare $f_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \\ x_1 + x_2 + (t+1)x_4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + (t+3)x_4 \end{pmatrix}$$

(1) Scrivere la matrice M_t associata ad f e calcolarne il rango al variare di t;
(2) calcolare la dimensione del nucleo di f_t e dell'immagine di f_t;
(3) al variare di t dire se esistono e quante sono le soluzioni dell'equazione

$$f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

(4) trovare lo spazio delle soluzioni per l'equazione sopra nel caso $t = 1$.

Soluzione:

(1) La matrice associata M_t è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & t+1 \\ 1 & 2 & 1 & t+3 \end{pmatrix}$$

La seconda colonna è uguale alla somma della prima e della terza. Quindi il rango di M_t è uguale al rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & t+1 \\ 1 & 1 & t+3 \end{pmatrix}$$

dove le prime due colonne sono linearmente indipendenti, quindi il rango è sempre almeno 2. Il determinante di quest'ultima matrice è $-3(t+1) - 2 \cdot 2 + 4 = -3t - 3$. Quindi il rango di M_t è 3 per $t \neq -1$ e 2 per $t = -1$.

(2) La dimensione dell'immagine di f_t è 3 per $t \neq -1$ e 2 per $t = -1$. Di conseguenza per la formula della dimensione il nucleo ha dimensione $4 - 3 = 1$ per $t \neq -1$ e $4 - 2 = 2$ per $t = -1$.

(3) Per $t \neq -1$ l'immagine di f_t è tutto lo spazio $\mathbb{R}^3$ e quindi il vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è sicuramente nell'immagine e poiché il nucleo ha dimensione 1 il sistema ha ∞ soluzioni.

Per $t = -1$ la quarta colonna di M_t è dipendente dalle prima e dalla terza e la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

fatta con la prima e la terza colonna di M_t e con il vettore v ha determinante 0 (si vede anche che la prima colonna è la somma di seconda e terza); dunque il sistema ha soluzione anche in questo caso; in particolare per $t = -1$ l'equazione data ha ∞^2 soluzioni.

(4) Per $t = 1$ per trovare una soluzione particolare invertiamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ e otteniamo $A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 2 & -8 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e dunque, poiché

$$A^{-1}v = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 2 & -8 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

visto che la matrice A era ottenuta da M_1 cancellando la seconda colonna, una soluzione particolare dell'equazione è data dal vettore

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il nucleo di M_1 è generato dal vettore

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e dunque una soluzione genenerica dell'equazione è della forma

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2.
(a) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y' + \frac{x}{x^2+1}y + \frac{x}{(x^2+1)^2} = 0$;
(b) Determinare poi la soluzione tale che $\lim_{x\to+\infty} xy(x) = 1$.

Soluzione:
(a) L'equazione omogenea $v' + \frac{x}{x^2+1}v = 0$ ha soluzione $v(x) = ce^{-(1/2\ln(x^2+1)} = \frac{c}{\sqrt{x^2+1}}$ al variare di $c \in \mathbb{R}$. Rimane da trovare una soluzione particolare dell'equazione della forma $y = uv$. La funzione incognita u deve risolvere $u' = -\frac{x}{v(x^2+1)^2}$; scegliendo ad esempio la soluzione dell'omogenea v relativa a $c = 1$ si ottiene l'equazione $u' = -\frac{x}{v(x^2+1)^2} = -\frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}$. Integrando si ha $u(x) = \frac{1}{(x^2+1)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, da cui $y(x) = \frac{1}{x^2+1}$. La soluzione generale è data quindi da

$$y(x) = \frac{1}{x^2+1} + \frac{c}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(b) Si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$

da cui

$$\lim_{x\to+\infty} xy(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} + \lim_{x\to+\infty} \frac{cx}{\sqrt{x^2+1}} = c;$$

si ottiene che $\lim_{x\to+\infty} xy(x) = 1$ per $c = 1$ e la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Esercizio 3.

(1) Trovare una primitiva della funzione $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ che in $x = -1$ valga $2\sqrt{2}$;

(2) Determinare l'area della porzione di piano delimitata dal grafico delle funzioni $f(x)$ e $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+4}+3}{(\sqrt{x+4}-1)(x-5)}$ ristrette agli $x \in [0,2]$.

Soluzione: (1) Integrando per parti si ha

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = x\sqrt{4-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = x\sqrt{4-x^2} - \int \frac{-4+4-x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$
$$= x\sqrt{4-x^2} + \int \frac{4}{\sqrt{4-x^2}}\,dx - \int \sqrt{4-x^2}\,dx$$

da cui

$$2\int \sqrt{4-x^2}\,dx = x\sqrt{4-x^2} + \int \frac{4}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = (\text{sostituendo } x = 2y)$$
$$= x\sqrt{4-x^2} + \int \frac{4}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = x\sqrt{4-x^2} + 4\arcsin(y) + c,$$
$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \mathit{costante} = F_c(x)$$

Imponendo che $F_c(-1) = 2\sqrt{2}$ si ottiene il valore della costante $2\sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\pi}{3}$, ossia $\dfrac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right) + 2\sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\pi}{3}$ è la primitiva cercata.

(2) Si verifica facilmente che $f(x) \geq 0$ e $g(x) \leq 0$ sull'intervallo $x \in [0,2]$ per cui si ha $f(x) \geq g(x)$ e l'area cercata si ottiene come $\int_0^2 (f(x) - g(x))\,dx$. Si ha che $\int_0^2 f(x)\,dx = \pi$ (si può usare la primitiva sopra o il fatto che si tratta dell'area di un quarto di cerchio di raggio 2). Rimane da integrare $g(x)$ con il cambio di variabile $\sqrt{x+4} = z$ da cui $x + 4 = z^2$ e $dx = 2zdz$.

$$\int \frac{\sqrt{x+4}+3}{(\sqrt{x+4}-1)(x-5)}\,dx = \int \frac{(z+3)2z}{(z-1)(z^2-9)}\,dz = \int \frac{2z}{(z-1)(z-3)}\,dz.$$

Poiché

$$\frac{2z}{(z-1)(z-3)} = \frac{3}{(z-3)} - \frac{1}{(z-1)}$$

si ha

$$\int \frac{\sqrt{x+4}+3}{(\sqrt{x+4}-1)(x-5)}\,dx = \int \Big(\frac{3}{(z-3)} - \frac{1}{(z-1)}\Big)\,dz =$$
$$= 3\ln(|z-3|) - \ln(|z-1|) + c = 3\ln(|\sqrt{x+4}-3|) - \ln(|\sqrt{x+4}-1|) + c.$$

Sostituendo

$$\int_0^2 \frac{\sqrt{x+4}+3}{(\sqrt{x+4}-1)(x-5)}\,dx = 3\ln\Big(\frac{3-\sqrt{6}}{5}\Big) - \ln(\sqrt{6}-1)$$

e l'area risulta

$$A = \pi + 3\ln\Big(\frac{5}{3-\sqrt{6}}\Big) + \ln(\sqrt{6}-1).$$

Esercizio 4. Determinare i numeri complessi soluzione dell'equazione
$$(|z|^2 + 2z^2 + 4\bar{z} + 1)(z^5 + 8) = 0.$$

Soluzione: Il polinomio si annulla se è nullo uno dei suoi fattori. Quindi dobbiamo avere
$$|z|^2 + 2z^2 + 4\bar{z} + 1 = 0$$
oppure
$$z^5 + 8 = 0.$$

Il primo fattore si può riscrivere ponendo $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Quindi
$$|z|^2 + 2z^2 + 4\bar{z} + 1 =$$
$$= x^2 + y^2 + 2x^2 - 2y^2 + 4ixy + 4x - 4iy + 1$$
Possiamo vedere quando si annulla ponendo a zero separatamente la parte reale e la parte immaginaria, quindi abbiamo:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x^2 - 2y^2 + 4x + 1 = 0 \\ 4xy - 4y = 0 \end{cases}$$
La seconda equazione si annulla per $y = 0$ o per $x = 1$. Per $y = 0$ dalla prima equazione otteniamo:
$$3x^2 + 4x + 1 = 0$$
e quindi $x = -2/3 \pm 1/3$. Per $x = 1$ dalla prima equazione otteniamo:
$$y^2 = 8$$
ovvero $y = \pm\sqrt{8}$. Gli zeri del primo fattore sono dunque: $z = -2/3 \pm 1/3$ e $z = 1 \pm i2\sqrt{2}$.

Il secondo fattore ha cinque zeri, dati dalle cinque radici quinte di -8. Tali radici sono
$$z_k = \sqrt[5]{8}\Big(\cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}\right)\Big)$$
per $k = 0, \ldots, 4$.

Compito di Istituzioni di Matematica 1–Seconda parte, Tema B

6 settembre 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ consideriamo l'applicazione lineare $f_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_3 + (t+2)x_4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + (t+4)x_4 \end{pmatrix}$$

(1) Scrivere la matrice M_t associata ad f e calcolarne il rango al variare di t;
(2) calcolare la dimensione del nucleo di f_t e dell'immagine di f_t;
(3) al variare di t dire se esistono e quante sono le soluzioni dell'equazione

$$f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

(4) trovare lo spazio delle soluzioni dell'equazione sopra per $t = 0$.

Soluzione:

(1) La matrice associata M_t è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & t+2 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & t+4 \end{pmatrix}$$

La terza colonna è uguale alla somma della prima e della seconda. Quindi il rango di M_t è uguale al rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t+2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & t+4 \end{pmatrix}$$

dove le prime due colonne sono linearmente indipendenti, quindi il rango è sempre almeno 2. Il determinante di quest'ultima matrice è $2t+4+t+2 = 3t+6$. Quindi il rango di M_t è 3 per $t \neq -2$ e 2 per $t = -2$.

(2) La dimensione dell'immagine di f_t è 3 per $t \neq -2$ e 2 per $t = -2$. Di conseguenza per la formula della dimensione il nucleo ha dimensione $4 - 3 = 1$ per $t \neq -2$ e $4 - 2 = 2$ per $t = -2$.

(3) Per $t \neq -2$ l'immagine di f_t è tutto lo spazio $\mathbb{R}^3$ e quindi il vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ è sicuramente nell'immagine e poiché il nucleo ha dimensione 1 il sistema ha ∞ soluzioni.

Per $t=-2$ la quarta colonna di M_t è dipendente dalle seconda e la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

fatta con la prima e la terza colonna di M_t e con il vettore v ha determinante 4; dunque il sistema non ha soluzione in questo caso.

(4) Per $t=0$ per trovare una soluzione particolare invertiamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ e otteniamo $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ -8 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ e dunque, poiché

$$A^{-1}v = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ -8 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix},$$

visto che la matrice A era ottenuta da M_1 cancellando la terza colonna, una soluzione particolare dell'equazione è data dal vettore

$$\begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Il nucleo di M_1 è generato dal vettore

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e dunque una soluzione generica dell'equazione è della forma

$$\begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2.
(a) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y' + \frac{x}{x^2+1}y - \frac{x}{(x^2+1)^2} = 0$;
(b) Determinare poi la soluzione tale che $\lim_{x\to+\infty} xy(x) = 3$.

Soluzione:
(a) L'equazione omogenea $v' + \frac{x}{x^2+1}v = 0$ ha soluzione $v(x) = ce^{-(1/2\ln(x^2+1)} = \frac{c}{\sqrt{x^2+1}}$ al variare di $c \in \mathbb{R}$. Rimane da trovare una soluzione particolare dell'equazione della forma $y = uv$. La funzione incognita u deve risolvere $u' = \frac{x}{v(x^2+1)^2}$; scegliendo ad esempio la soluzione dell'omogenea v relativa a $c = 1$ si ottiene l'equazione $u' = -dfracxv(x^2+1)^2 = \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}$. Integrando si ha $u(x) = -\frac{1}{(x^2+1)^{1/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, da cui $y(x) = -\frac{1}{x^2+1}$. La soluzione generale è data quindi da

$$y(x) = -\frac{1}{x^2+1} + \frac{c}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(b) Si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$

da cui

$$\lim_{x\to+\infty} xy(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{x^2+1} + \lim_{x\to+\infty} \frac{cx}{\sqrt{x^2+1}} = c;$$

si ottiene che $\lim_{x\to+\infty} xy(x) = 3$ per $c = 3$ e la soluzione cercata è

$$y(x) = -\frac{1}{x^2+1} + \frac{3}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Esercizio 3.

(1) Trovare una primitiva della funzione $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ che in $x = -1$ valga $2\sqrt{3}$;

(2) Determinare l'area della porzione di piano delimitata dal grafico delle funzioni $f(x)$ e $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+4}+3}{(\sqrt{x+4}-1)(x-5)}$ ristrette agli $x \in [0,1]$.

Soluzione: (1) Integrando per parti si ha

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = x\sqrt{9-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = x\sqrt{9-x^2} - \int \frac{-9+9-x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$$
$$= x\sqrt{9-x^2} + \int \frac{9}{\sqrt{9-x^2}}\,dx - \int \sqrt{9-x^2}\,dx$$

da cui

$$2\int \sqrt{9-x^2}\,dx = x\sqrt{9-x^2} + \int \frac{9}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = (\text{sostituendo } x = 3y)$$
$$= x\sqrt{9-x^2} + \int \frac{9}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = x\sqrt{9-x^2} + 9\arcsin(y) + c$$

e

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + \mathit{costante} = F_c(x)$$

Imponendo che $F_c(-1) = 2\sqrt{3}$ si ottiene il valore della costante $\sqrt{2} + \dfrac{9}{2}\arcsin\left(\dfrac{1}{3}\right) + 2\sqrt{3}$, ossia $\dfrac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + \dfrac{9}{2}\arcsin\left(\dfrac{x}{3}\right) + 2\sqrt{3} + \sqrt{2} + \dfrac{9}{2}\arcsin\left(\dfrac{1}{3}\right)$ è la primitiva cercata.

(2) Si verifica facilmente che $f(x) \geq 0$ e $g(x) \leq 0$ sull'intervallo $x \in [0,2]$ per cui si ha $f(x) \geq g(x)$ e l'area cercata si ottiene come $\displaystyle\int_0^2 (f(x) - g(x))\,dx$. Si ha che $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx = \frac{9}{4}\pi$ (si può usare la primitiva sopra o il fatto che si tratta dell'area di un quarto di cerchio di raggio 3). Si fanno poi gli stessi conti della versione A cambiando alla fine gli estremi di integrazione:

$$\int_0^3 \frac{\sqrt{x+4}+3}{(\sqrt{x+4}-1)(x-5)}\,dx = 3\ln\left(\frac{3-\sqrt{7}}{5}\right) - \ln(\sqrt{7}-1)$$

e l'area risulta

$$A = \frac{9}{4}\pi + 3\ln\left(\frac{5}{3-\sqrt{7}}\right) + \ln(\sqrt{7}-1).$$

Esercizio 4. Determinare i numeri complessi soluzione dell'equazione

$$(|z|^2 + 2z^2 + 4\bar{z} + 1)(z^5 + 8) = 0.$$

Soluzione: Il polinomio si annulla se è nullo uno dei suoi fattori. Quindi dobbiamo avere

$$|z|^2 + 2z^2 + 4\bar{z} + 1 = 0$$

oppure

$$z^5 + 8 = 0.$$

Il primo fattore si può riscrivere ponendo $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Quindi

$$|z|^2 + 2z^2 + 4\bar{z} + 1 =$$

$$= x^2 + y^2 + 2x^2 - 2y^2 + 4ixy + 4x - 4iy + 1$$

Possiamo vedere quando si annulla ponendo a zero separatamente la parte reale e la parte immaginaria, quindi abbiamo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x^2 - 2y^2 + 4x + 1 = 0 \\ 4xy - 4y = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione si annulla per $y = 0$ o per $x = 1$. Per $y = 0$ dalla prima equazione otteniamo:

$$3x^2 + 4x + 1 = 0$$

e quindi $x = -2/3 \pm 1/3$. Per $x = 1$ dalla prima equazione otteniamo:

$$y^2 = 8$$

ovvero $y = \pm\sqrt{8}$. Gli zeri del primo fattore sono dunque: $z = -2/3 \pm 1/3$ e $z = 1 \pm i2\sqrt{2}$.

Il secondo fattore ha cinque zeri, dati dalle cinque radici quinte di -8. Tali radici sono

$$z_k = \sqrt[5]{8}\Big(\cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}\right)\Big)$$

per $k = 0, \ldots, 4$.