Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni.

Appello di Analisi Matematica I del 25/07/2017. Soluzioni.

Esercizio 1. Studiare la convergenza semplice e assoluta del seguente integrale improprio

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{\sin(x+1)}{\sqrt{x^3+1}}\, dx\,.$$

Soluzione. Usando la decomposizione $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$, in cui $x^2-x+1 \geq 1/2$, si ha il limite

$$\lim_{x\to -1+} \frac{\sin(x+1)}{\sqrt{x^3+1}} = 0.$$

Se ne deduce che la funzione $\frac{\sin(x+1)}{\sqrt{x^3+1}}$ è integrabile secondo Riemann su $(-1,1)$ (coincide con una funzione continua su $[-1,1]$). Rimane da indagare l'esistenza dell'integrale improprio su $(1,+\infty)$. L'integrale improprio tra 1 e $+\infty$ converge assolutamente per confronto con la funzione $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$.

Esercizio 2. Calcolare lo sviluppo di Taylor al quarto ordine in 0 delle funzioni

$$\text{(i)}\ \ln(1+x\arctan x);\,\text{(ii)}\ e^{x\arctan(-x)}.$$

Calcolare poi il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x\arctan x)+1-e^{x^2}}{\sqrt{1+2x^4}-1}.$$

Soluzione.

(i) Lo sviluppo di Taylor di $\arctan(x)$ al quarto ordine in 0 è

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

quindi

$$x\arctan(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4).$$

Lo sviluppo al secondo ordine in $x=0$ di $\ln(1+x)$ è dato da

$$x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

quindi

$$\ln(1+x\arctan x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) - (x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4))^2/2 + o(x^2(\arctan(x))^2) =$$

$$x^2 - \frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{2} + o(x^4) + o(x^2(\arctan(x))^2)\,.$$

Poiché $(x\arctan x) \to 0$ implica che $x\to 0$ e abbiamo che $\lim_{x\to 0}\frac{x\arctan(x)}{x^2} = 1$, possiamo scrivere $o(x^2(\arctan(x))^2) = o(x^4)$. Dunque per $x\to 0$

$$\ln(1+x\arctan x) = x^2 - \frac{5x^4}{6} + o(x^4)\,.$$

(ii) Per quanto visto sopra la funzione $x\arctan(-x)$ ha sviluppo in 0

$$-x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

e analogamente a prima $o(x^2(\arctan(-x))^2) = o(x^4)$, dunque

$$e^{x\arctan(-x)} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4) + (-x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4))^2/2 + o(x^2(\arctan(-x))^2) =$$

$$= 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + x^4/2 + o(x^4) = 1 - x^2 + \frac{5x^4}{6} + o(x^4).$$

Per calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x\arctan x)+1-e^{x^2}}{\sqrt{1+2x^4}-1}.$$
calcoliamo lo sviluppo di Taylor a quarto ordine di numeratore e denominatore in 0: per quanto già visto
$$\ln(1+x\arctan x)=x^2-\frac{5x^4}{6}+o(x^4)\ .$$
Inoltre
$$1-e^{x^2}=-x^2-x^4/2+o(x^4)$$
quindi il numeratore risulta
$$-\frac{4x^4}{3}+o(x^4).$$
Lo sviluppo del denominatore è
$$\sqrt{1+2x^4}-1=x^4+o(x^4)$$
dunque il limite risulta pari a $-\frac{4}{3}$.

Esercizio 3. Sia $f\,:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da
$$f(x)=\frac{1}{4}\sqrt{1+4x^2}.$$

a) Disegnare grafico di f nel piano cartesiano e determinare le sue intersezioni con la retta $y=x$.
b) Studiare al variare del parametro reale α la convergenza della successione:
$$\begin{cases} x_{n+1}=f(x_n)\\ x_0=\alpha.\end{cases}$$
c) (Facoltativo) Sia $\alpha=1$ e sia $L=\lim_{n\to+\infty}x_n$ nel punto sopra. Applicando noti criteri di convergenza studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(x_n-L).$$

Soluzione. a) La funzione f è pari, non negativa e derivabile infinite volte, per cui basta studiarla per $x\geq 0$. Si ha
$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+4x^2}},f''(x)=\frac{1}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}$$
per cui f è crescente e convessa su $[0,+\infty[$. Si calcola poi
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)-\frac{x}{2}=0.$$
da cui segue che f è asintotica alla retta $y=\dfrac{x}{2}$ a $+\infty$. L'equazione $f(x)=x$ ha la sola soluzione $L=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ e si vede che $f(x)>x$ per $x<L$ ed $f(x)<x$ per $x>L$.

b) per quanto visto sopra si deduce subito che per $\alpha<1/2\sqrt{3}$ la successione è strettamente crescente e tende a $1/2\sqrt{3}$, per $\alpha=1/2\sqrt{3}$ la successione è costante uguale a $1/2\sqrt{3}$ e per $\alpha>1/2\sqrt{3}$ la successione è strettamente decrescente e tende a $1/2\sqrt{3}$.

c) Per $\alpha=1$ la successione x_n è decrescente e tende ad $L=1/2\sqrt{3}$ per cui la serie è a termini negativi. Si applica il criterio del rapporto al termine noto cambiato di segno e si ottiene
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{L-x_{n+1}}{L-x_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{f(L)-f(x_n)}{L-x_n}=\lim_{n\to+\infty}f'(y_n)$$
per un $y_n\in(L,x_n)$. Passando al limite per $n\to+\infty$ ed usando che f' è continua e $\lim_{n\to+\infty}y_n=L$ si ottiene
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{L-x_{n+1}}{L-x_n}=f'(L)=\frac{1}{4}<1.$$
La serie quindi converge per il criterio del rapporto.