Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni.

Appello di Analisi Matematica I del 23/02/2017. Soluzioni.

Esercizio 1. Studiare al variare del parametro reale x il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n - e^{n+1}}{n^5 - 2n^3}(1-x^2)^n,$$

determinandone convergenza semplice e assoluta.

Soluzione. Ponendo $y = 1 - x^2$ la serie sopra è una serie di potenze in y con coefficienti $b_n = \frac{4^n - e^{n+1}}{n^5 - 2n^3}$, si calcola quindi $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{b_n}$ (vedremo che esiste). Si ha

$$\sqrt[n]{\frac{4^n - e^{n+1}}{n^5 - 2n^3}} = \frac{\sqrt[n]{4^n - e^{n+1}}}{\sqrt[n]{n^5 - 2n^3}} = \frac{4\sqrt[n]{1 - e(\frac{e}{4})^n}}{\sqrt[n]{n^5}\sqrt[n]{1 - 2n^{-3}}}.$$

Dato che le successioni $1 - e(e/4)^n, 1 - 2n^{-3}$ tendono entrambe ad 1 sono definitivamente comprese tra due costanti strettamente positive per cui, per confronto, le loro radici ennesime tendono ad 1. Poiché è noto che $\sqrt[n]{n}$ tende ad 1 e $\sqrt[n]{n^5} = (\sqrt[n]{n})^5$, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{b_n} = 4.$$

Per il criterio della radice si deduce che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n y^n$ converge assolutamente per $4|y| < 1$ e non converge (neanche semplicemente) per $4|y| > 1$ (il suo termine n-esimo in questo caso infatti non va a zero). Rimane da vedere cosa succede per $y = 1/4$ ed $y = -1/4$. Nel primo caso la serie si riduce a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - e(\frac{e}{4})^n}{n^5 - 2n^3},$$

e la serie converge per confronto con la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5 - 2n^3}$, asintotica alla serie armonica di esponente 5. Per $y = -1/4$ la serie converge perché converge assolutamente (la serie dei valori assoluti coincide con la serie appena studiata). Riscrivendo tutto in termini di x con l'uguaglianza $y = 1 - x^2$, si ottiene che la serie converge assolutamente e semplicemente solo per $|1 - x^2| \le 1/4$, ossia $\frac{\sqrt{3}}{2} \le |x| \le \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Esercizio 2. Si consideri la funzione della variabile reale $x > 0$

$$g(x) := \int_x^{x^2} \frac{\log(t)}{1+t}\, dt\ .$$

Si dica se esistono, esibendoli in caso affermativo: **i)** punti di minimo assoluto, **ii)** punti di massimo assoluto, **iii)** punti di minimo relativo, **iv)** punti di massimo relativo. Si calcoli inoltre **v)** $\inf_{x>0} g(x)$ e **vi)** $\sup_{x>0} g(x)$.

Soluzione. i) per $x > 1$ l'integrando è positivo e $x < x^2$, così $g(x) > 0$. Per $0 < x < 1$ l'integrando è negativo ma $x > x^2$, così in questo caso si ha ancora

$$g(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{|\log(t)|}{1+t}\,dt > 0.$$

Poiché d'altra parte $g(1) = 0$ si conclude che $x = 1$ è punto di minimo, l'unico, per la funzione $g(x)$.

ii) per $1 < x \leq t \leq x^2$ si ha

$$\log(t) \geq \log(x) \quad \text{e} \quad \frac{1}{1+t} \geq \frac{1}{1+x^2},$$

quindi

$$g(x) \geq (x^2 - x)\frac{\log x}{1+x^2} = (1 + o(1))\log(x) \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Dunque $g(x)$ è illimitata superiormente e non ammette massimo assoluto.

iii, iv) Per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale e la formula di derivazione di funzioni composte si ha che la derivata di g è

$$g'(x) = 2x\frac{\log(x^2)}{1+x^2} - \frac{\log(x)}{1+x} = \frac{3x^2+4x-1}{(1+x)(1+x^2)}\log(x).$$

Dal segno di $\log(x)$ e del polinomio $3x^2 + 4x - 1$ si ha subito che g è strettamente crescente fra 0 e $\frac{\sqrt{7}-2}{3}$, ha un massimo locale nel punto $\frac{\sqrt{7}-2}{3}$, è decrescente fra quest'ultimo e 1 (dove come si è visto si annulla ed ha minimo assoluto); è crescente per $x > 1$, e tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$;

v, vi) in particolare $\inf_{x>0} g(x) = 0$ e $\sup_{x>0} g(x) = +\infty$.

Esercizio 3. i) Risolvere sul campo complesso l'equazione

$$4z^2 - 2z + 1 = 0.$$

Determinare per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ si abbia $4z^2 + 2z + 1 \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Applicando la formula risolutiva, o fattorizzando il polinomio

$$4z^2 - 2z + 1 = (z^2 - 2z + 1) + 3z^2 =$$

$$(z-1)^2 - (\sqrt{3}iz)^2 = (z - 1 + \sqrt{3}iz)(z - 1 - \sqrt{3}iz)$$

si trovano le radici

$$\frac{1}{1 \pm \sqrt{3}i} = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}i.$$

Posto $\operatorname{Re} z = x$ e $\operatorname{Im} z = y$, si ha $\operatorname{Im} z^2 = 2xy$ da cui

$$\operatorname{Im}(4z^2 + 2z + 1) = 8xy + 2y = 2y(4x + 1).$$

L'equazione sopra si annulla per $y = 0$ oppure $x = -1/4$. Concludendo $4z^2 + 2z + 1 \in \mathbb{R}$ se z giace sulla retta reale $\operatorname{Im}(z) = 0$ oppure sulla retta immaginaria $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{4}$.