Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni.

Università di Pisa.

Appello di Analisi Matematica I del 17-09-2017. Soluzioni.

Esercizio 1. Sia $f\,:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x)=\frac{1}{4}x|x|+\frac{1}{2}.$$

a) Disegnare grafico di f nel piano cartesiano e determinare le sue intersezioni con la bisettrice $y=x$.

b) Studiare al variare del parametro reale α la convergenza della successione:

$$\begin{cases} x_{n+1}=f(x_n)\\ x_0=\alpha.\end{cases}$$

c) Per $\alpha\geq 4$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{x_n}.$$

Soluzione. La funzione $f(x)$ è continua sul suo dominio; in particolare f coincide coi polinomi di secondo grado $-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}$ su $(-\infty,0]$ e $\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}$ su $[0,+\infty)$. Si calcola facilmente che

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & x>0\\ \\ -\dfrac{x}{2} & x<0\end{cases}$$

e poichè si ha $\lim\limits_{x\to 0+}f'(x)=0=\lim\limits_{x\to 0-}f'(x)$, f è derivabile anche in $x=0$ con $f'(0)=0$. Dato che f' esiste ed è non negativa su tutto $\mathbb{R}$ la funzione continua f è crescente. Il suo grafico è dato dai due rami di parabola scritti sopra. Si nota che f non ammette derivata seconda in $x=0$ e che $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

Le intersezioni del grafico di f con la retta $y = x$ sono i punti fissi di f coincidono e con le soluzioni $x \leq 0$ di $-\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} = x$ e con le soluzioni $x \geq 0$ di $\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} = x$, ossia

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + x - \dfrac{1}{2} = 0 \\ \\ x \leq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - x + \dfrac{1}{2} = 0 \\ \\ x \geq 0 \end{cases}.$$

Le soluzioni del primo sistema sono date dal solo punto $a_1 := -2 - \sqrt{6}$ (l'altra soluzione è positiva e non può essere accettata), le soluzioni del secondo sono invece $a_2 := 2 - \sqrt{2}$, $a_3 := 2 + \sqrt{2}$. Dal grafico di f si vede subito che $f(x) \leq x$ su $(-\infty, a_1)$ e su (a_2, a_3), mentre $f(x) \geq x$ su (a_1, a_2) e su $(a_3, +\infty)$. Per le proprietà generali delle successioni definite iterando una funzione crescente e continua, si conclude che

se $\alpha < -2 - \sqrt{6}$ allora x_n è decrescente e diverge a $-\infty$

se $\alpha = -2 - \sqrt{6}$ allora x_n è costante e converge a $-2 - \sqrt{6}$

se $-2 - \sqrt{6} < \alpha < 2 - \sqrt{2}$ allora x_n è crescente e converge a $2 - \sqrt{2}$

se $\alpha = 2 - \sqrt{2}$ allora x_n è costante e converge a $2 - \sqrt{2}$

se $2 - \sqrt{2} < \alpha < 2 + \sqrt{2}$ allora x_n è decrescente e converge a $2 - \sqrt{2}$

se $\alpha = 2 + \sqrt{2}$ allora x_n è costante e converge a $2 + \sqrt{2}$

se $\alpha > 2 + \sqrt{2}$ allora x_n è crescente e diverge a $+\infty$

c) Se $\alpha \geq 4$ siano nell'ultimo caso sopra, ossia x_n diverge a $+\infty$ (Si poteva trattare questo caso indipendentemente dalla trattazione sopra usando che se $x \geq 4$ allora $f(x) \geq |x| + 1/2$ e questo assicura induttivamente che $x_n \geq 4$ $\forall n$, $x_{n+1} \geq x_n + 1/2$ da cui $x_n \geq 4 + n/2$). Questo assicura che $1/x_n$ converge a 0. Poiché $1/x_n$ è positiva si puó applicare il criterio del rapporto. Si ha

$$\frac{\dfrac{1}{x_{n+1}}}{\dfrac{1}{x_n}} = \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_n}{\dfrac{1}{4}x_n^2 + \dfrac{1}{2}}$$

ed usando che $x_n \to +\infty$, passando al limite per $n \to +\infty$ si ottiene che il limite del rapporto è 0. Se ne deduce che la serie a termini positivi $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x_n}$ converge.

Esercizio 2. Date le funzioni

$$g(x) = \exp(x \tan x) - \cos(\sqrt{x^2 + 1} - 1)$$

$$h(x) = \arctan \log(\cos x + \sin x),$$

a) determinare sviluppi per $x \to 0$ della forma

$$g(x) = ax^m + o(x^m)$$

$$h(x) = bx^n + o(x^n),$$

con a e b numeri reali non nulli, ed m e n interi;

b) calcolare

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log g(x)}{\log h(x)}.$$

Soluzione. Si osserva che $\lim_{x\to 0} g(x) = 0 = \lim_{x\to 0} h(x)$. Visto che le funzioni g, h sono derivabili infinite volte in un intorno di 0, per calcolare lo sviluppo in infinitesimi per $x \to 0$ di g ed h si potrebbe usare la formula di Taylor. Il calcolo delle derivate è un po' complicato per cui un modo più veloce consiste nel comporre gli sviluppi in infinitesimi delle funzioni composte.

Si ha, per $x \to 0$:

$$\exp x = 1 + x + o(x) \qquad \sqrt{x+1} = 1 + \frac{x}{2} + o(x) \qquad \sin(x) = x + o(x)$$

$$\cos(x) = 1 + o(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \tan(x) = x + o(x)$$

$$\log(1+x) + x + o(x) \qquad \arctan(x) = x + o(x),$$

da cui

$$\exp(x \tan x) = 1 + x \tan x + o(x \tan x) = 1 + x^2 + o(x^2)$$

e

$$\cos(\sqrt{1+x^2} - 1) = \cos\Big(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\Big) = 1 + o(x^2)$$

quindi $g(x) = x^2 + o(x^2)$. Poi:

$$\cos x + \sin x = 1 + x + o(x)$$

$$\log(\cos x + \sin x) = \log(1 + x + o(x)) = x + o(x)$$

quindi

$$h(x) = \arctan(\log(\cos x + \sin x)) = \arctan(x + o(x)) = x + o(x).$$

b) Si ha, dagli sviluppi del punto precedente:

$$\frac{\log g(x)}{\log h(x)} = \frac{\log x^2(1+o(1))}{\log x(1+o(1))} = \frac{2\log x + \log(1+o(1))}{\log x + \log(1+o(1))} = 2 + o(1)$$