Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni.

Appello di Analisi Matematica I del 15/09/2017. Soluzioni.

Esercizio 1. Si consideri l'integrale

$$I(\alpha) := \int_0^{+\infty} x^{-\alpha} \sin \sqrt{x}\, dx$$

dipendente dal parametro reale α.
i. Dire per quali esponenti reali α l'integrale converge semplicemente.
ii. Dire per quali esponenti reali α l'integrale converge assolutamente.
iii. Dire per quali esponenti reali α l'integrale converge ad un valore positivo.

Soluzione. Con il cambio di variabile $x = t^2$, $dx = 2t\, dt$, per $0 < \epsilon < T$ l'integrale definito su $[\epsilon, T]$ diventa

$$\int_\epsilon^T x^{-\alpha} \sin \sqrt{x}\, dx = 2 \int_{\sqrt{\epsilon}}^{\sqrt{T}} t^{-2\alpha+1} \sin t\, dt$$

e quindi è equivalente porre le domande i,ii,iii per l'integrale

$$\int_0^{+\infty} t^{-2\alpha+1} \sin t\, dt\,.$$

Per confronto asintotico con $t^{-2\alpha+2}$ si ha che la funzione $t^{-2\alpha+1} \sin t$ è localmente integrabile in 0 se e solo se $-2\alpha + 2 > -1$ cioè $\alpha < 3/2$. Inoltre è necessario per la convergenza che $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} t^{-2\alpha+1} \sin t\, dt \to 0$, quindi $-2\alpha + 1 < 0$ cioè $\alpha > 1/2$. Le condizioni $1/2 < \alpha < 3/2$ sono anche sufficienti, perché in tal caso l'integrando è infinitesimo e la convergenza dell'integrale è equivalente a quella di una serie

$$\int_0^{+\infty} t^{-2\alpha+1} \sin t\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} t^{-2\alpha+1} \sin t\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\pi} (n\pi + t)^{-2\alpha+1} \sin t\, dt\,,$$

convergente per il criterio di Leibnitz, essendo a termini a segno alterno e decrescenti a 0 in valore assoluto. Si noti che il criterio di Leibnitz afferma anche che la somma della serie è positiva. Riguardo alla convergenza assoluta osserviamo che, similmente

$$\int_0^{+\infty} t^{-2\alpha+1} |\sin t|\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} t^{-2\alpha+1} |\sin t|\, dt$$

e poiché, assumendo $-2\alpha + 1 < 0$,

$$2\pi^{-2\alpha+1}(n + 1)^{-2\alpha+1} \le \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} t^{-2\alpha+1} |\sin t|\, dt \le 2\pi^{-2\alpha+1} n^{-2\alpha+1}$$

si ha convergenza assoluta per $-2\alpha + 1 < -1$ per confronto con la serie armonica generalizzata, cioè $\alpha > 1$. In conclusione: **(i)** e **(iii)** se e solo se $1/2 < \alpha < 3/2$ e **(ii)** se e solo se $1 < \alpha < 3/2$.

Esercizio 2. Dire se converge la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}} - \arctan \sqrt{n} \right|^{\frac{2}{3}}$$

Soluzione. Dalle formule elementari $\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2$ e dallo sviluppo di Taylor della funzione arcotangente,

$$\arctan x = x - x^3/3 + o(x^3) \qquad (x \to 0)$$

si ha subito, con $x = 1/\sqrt{n}$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}} - \arctan \sqrt{n} = -\frac{1}{3} n^{-3/2}(1 + o(1)) \qquad (n \to \infty)$$

e si conclude che la serie diverge per confronto asintotico con la serie armonica.

Esercizio 3. Determinare tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$\bar{z}^2|z| - 4iz = 0$$

e rappresentarle sul piano complesso identificato con $\mathbb{R}^2$. Determinare poi l'area del poligono $\mathcal{P}$ di $\mathbb{R}^2$ che ha come vertici le soluzioni con parte immaginaria minore od uguale a 0.

Soluzione. Uguagliando i moduli dei due termini nell'equazione $\bar{z}^2|z| = 4iz$ si ottiene che $|z|^3 = 4|z|$, che ha le soluzioni $|z| = 0$ e $|z| = 2$. La prima condizione dà la soluzione $z = 0$; nel caso $|z| = 2$ si scrive il numero complesso z in forma esponenziale $z = 2e^{i\theta}$ e si riscrive l'equazione come $8e^{-i2\theta} - 4i2e^{i\theta} = 0$. Si ha quindi che θ deve soddisfare l'equazione $e^{-i3\theta} = i$. Poiché $i = e^{i\pi/2}$ si ha $-3\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k = 0, 1, 2$, cioè $\theta_1 = -\dfrac{\pi}{6}$, $\theta_2 = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2}$ e $\theta_3 = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{7\pi}{6}$. Concludendo l'equazione ha le 4 soluzioni $z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $z_3 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\sqrt{3} - i$, $z_4 = 0$.
Il poligono $\mathcal{P}$ ha come vertici z_1, z_3, z_4 ed è un triangolo di base $2\sqrt{3}$ ed altezza 1. La sua area è uguale a $\sqrt{3}$.