*Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni.*

**Appello di Analisi Matematica I del 19/06/2016. Soluzioni.**

**Esercizio 1.** Sia $a$ un numero reale positivo e $b := a - \log(e^a - 1)$. Provare che
**i)** $b > 0$
**ii)** $\max(a, b) \geq \log 2$.

**Soluzione.**
**i).** Poiché il logaritmo è strettamente crescente si ha subito $a = \log(e^a) > \log(e^a - 1)$ e quindi $b := a - \log(e^a - 1) > 0$.
**ii)** Poiché $\log(e^a - 1) = \log\big(e^a(1 - e^{-a})\big) = a + \log(1 - e^{-a})$ la relazione fra $a$ e $b$ si scrive anche $e^{-a} + e^{-b} = 1$. Quindi almeno uno fra $e^{-a}$ e $e^{-b}$ è minore o uguale a $1/2$, quindi almeno uno fra $e^a$ e $e^b$ è maggiore o uguale a 2, dunque $\max(a, b) \geq \log 2$.

*Oppure* Si può studiare la funzione $u(x) := x - \log(e^x - 1)$ definita per $x > 0$, il cui grafico è costituito esattamente dalle coppie $(a, b)$ di cui si tratta. Poiché log ed exp sono funzioni crescenti, $u(x)$ è una funzione decrescente; inoltre il suo grafico incontra la bisettrice $\{x = y\}$ esattamente nel punto $(\log 2, \log 2)$. Dalla decrescenza si ha che $a \leq \log 2$ (rispettivamente $a \geq \log 2$) implica $b = u(a) \geq \log 2$ (risp. $b \leq \log 2$), cosicché in ogni caso $\max(a, b) \geq \log 2$.

**Esercizio 2.**
**i)** Per ogni $k \in \mathbb{N}$ determinare il polinomio $P_k(x)$ di grado minore od uguale a $k$ tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} P_k'(x) = P_k(x) - \dfrac{x^k}{k!} \\ \\ P_k(0) = 1 \end{cases}$$

**ii)** Calcolare il limite $\lim_{k \to +\infty} P_k(x)$.

**Soluzione. i)** Determiniamo i coefficienti del polinomio $P_k(x) := \sum_{j=0}^{k} a_j x^j$. Si ha $P_k'(x) = \sum_{j=1}^{k} j a_j x^{j-1} = \sum_{j=0}^{k-1} (j+1) a_{j+1} x^j$. Deve essere $a_0 = P_k(0) = 1$. Inoltre uguagliando i coefficienti

$$\sum_{j=0}^{k-1} (j+1) a_{j+1} x^j = \sum_{j=0}^{k} a_j x^j - \frac{x^k}{k!}$$

per il principio di identità dei polinomi si ricava

$$a_k = \frac{1}{k!}, \quad (j+1) a_{j+1} = a_j \text{ per } j = 0, \dots, k-1$$

da cui $a_j = \dfrac{1}{j!}$ per $i = 0, \dots, k$ e

$$P_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{x^j}{j!}.$$

**ii)** Si riconosce che $P_k(x)$ è la somma parziale della serie esponenziale $e^x = \sum_{j=0}^{+\infty} \dfrac{x^j}{j!}$, per cui

$$\lim_{k \to \infty} P_k(x) = e^x \ .$$

**Esercizio 3.** Sia $f(x) = e^{1-x} - e^{3-3x}$.
**i)** Disegnare un grafico di $f$ mettendone in evidenza gli zeri, i punti critici, gli intervalli di monotonia e convessità.

**ii)** Verificare che $f$ ha un unico punto di flesso e determinare il più grande intervallo contenente questo punto sul quale f risulti invertibile.
**iii)** Calcolare la derivata prima di detta funzione inversa nel punto di flesso.

**Soluzione.**
**i)** La funzione $f$ si annulla per $e^{1-x} = e^{3-3x}$, cioè per $e^{2-2x} = 1$, dunque solo per $x = 1$. La derivata è:

$$f'(x) = -e^{1-x} + 3e^{3-3x} = -e^{3-3x}\left(e^{2x-2} - 3\right)$$

Dunque essa si annulla per $x = 1 + \frac{\log(3)}{2} = \log(\sqrt{3}e)$, è positiva per $x > \log(\sqrt{3}e)$ e negativa per $x < \log(\sqrt{3}e)$ . Quindi ha un massimo locale in $x = \log(\sqrt{3}e)$, è crescente in $(-\infty, \log(\sqrt{3}e)]$ e decrescente in $[\log(\sqrt{3}e), +\infty)$. Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$f$ ha massimo assoluto in $x = \log(\sqrt{3}e)$ ed estremo inferiore $-\infty$.

Si ha inoltre

$$f''(x) = e^{1-x} - 9e^{3-3x} = e^{3-3x}(e^{2x-2} - 9)$$

dunque $f''(x) = 0$ se $9 = e^{2-2x}$, cioè per $x = \log(3e) = 1 + \log(3)$; $f'' > 0$ per $x > \log(3e)$, quindi $f$ è concava in $(-\infty, \log(3e)]$, convessa in $[\log(3e), +\infty)$.

**ii)** Per quanto visto al punto precedente, $x = \log(3e)$ è l'unico punto di flesso della funzione. Inoltre $f$ risulta invertibile negli intervalli $(-\infty, \log(\sqrt{3}e)]$ e $[\log(\sqrt{3}e), +\infty)$ e quindi il più grande intervallo che contiene il punto di flesso in cui $f$ è invertibile è $[\log(\sqrt{3}e), +\infty)$.

**iii)** Poiché $f(\log(3e)) = \frac{8}{27}$, risulta

$$(f^{-1})'\left(\frac{8}{27}\right) = \frac{1}{f'(\log(3e))} = -\frac{27}{6}.$$