Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni.

Appello di Analisi Matematica I del 06/02/2017. Soluzioni.

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (x + \frac{x^2}{2})e^{-x}$.

(i) Dire quante soluzioni ha l'equazione

$$f(x) = \lambda$$

al variare del dato $\lambda \in \mathbb{R}$.
(ii) Provare che esiste un unico $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \lambda^*$ ha tre soluzioni $x_1 < x_2 < x_3$ equidistanziate, cioè

$$\begin{cases} f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = \lambda^* \\ x_3 - x_2 = x_2 - x_1 > 0 \end{cases}$$

(iii) Provare che $0 < \lambda^* < 1$.

Soluzione. (i). Dallo studio del segno della funzione $f(x) = x\left(1 + \frac{x}{2}\right)e^{-x}$ e della sua derivata $f'(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)e^{-x}$, e dai limiti $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, si deduce, posto per brevità $f(\sqrt{2}) = (1+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}} := \mu$ e $f(-\sqrt{2}) = (1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}} = -1/\mu$, che la f si restringe a una funzione rispettivamente

$$\begin{aligned} &\text{decrescente e bigettiva }]-\infty, -\sqrt{2}] \xrightarrow{\sim}]-1/\mu, +\infty[\\ &\text{crescente e bigettiva } [-\sqrt{2},\ \sqrt{2}] \xrightarrow{\sim} [-1/\mu, \mu] \\ &\text{decrescente e bigettiva } [\sqrt{2}, +\infty[\xrightarrow{\sim} [\mu, 0[. \end{aligned}$$

Le inverse di f su ciascuno di questi intervalli definiscono quindi tre funzioni:

$$\begin{aligned} &g_1 :]-1/\mu, +\infty[\xrightarrow{\sim}]-\infty, -\sqrt{2}], \ \text{ decrescente e bigettiva,} \\ &g_2 : \ [-1/\mu, \mu] \xrightarrow{\sim} [-\sqrt{2},\ \sqrt{2}], \text{ crescente e bigettiva,} \\ &g_3 : \ [\mu, 0[\xrightarrow{\sim} [\sqrt{2}, +\infty[, \ \text{ decrescente e bigettiva.} \end{aligned}$$

Da ciò segue che l'equazione $f(x) = \lambda$ ammette esattamente:

$$\begin{aligned} &\text{1 soluzione, } g_1(\lambda), \text{ se } \mu < \lambda \\ &\text{2 soluzioni, } g_1(\mu) < g_2(\mu) = g_3(\mu) = \sqrt{2}, \text{ se } \mu = \lambda \\ &\text{3 soluzioni, } g_1(\lambda) < g_2(\lambda) < g_3(\lambda), \text{ se } 0 < \lambda < \mu \\ &\text{2 soluzioni, } g_1(\lambda) < g_2(\lambda), \text{ se } \ -1/\mu < \lambda \le 0 \\ &\text{1 soluzione, } g_1(-1/\mu) = g_2(-1/\mu) = -\sqrt{2}, \text{ se } \ -1/\mu = \lambda \le 0 \\ &\text{nessuna soluzione se } \lambda < -1/\mu. \end{aligned}$$

ii. Dalla discussione precedente si ha che per un $\lambda^* \in \mathbb{R}$ l'esistenza di tre soluzioni equidistanziate è equivalente a $\lambda^* \in]0, \mu[$ e $g_3(\lambda^*) - g_2(\lambda^*) = g_2(\lambda^*) - g_1(\lambda^*)$. Poiché la funzione $g_3 - 2g_2 + g_1$ sull'intervallo $]0, \mu[$ è somma di tre funzioni strettamente decrescenti, continue, e cambia segno, concludiamo che vi è esattamente un λ^* come richiesto; inoltre $0 < \lambda^* < \mu = (1+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$, che è certamente minore di 1 perché $e^{\sqrt{2}} > 1 + \sqrt{2}$.

Esercizio 2. Dire se è convergente l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+e^{2t}-10e^{3t}}$$

e in caso affermativo, calcolarlo.

Soluzione. Si tratta di eseguire le operazioni richieste dalla procedura di integrazione per calcolare l'integrale su $[0,\tau]$, e poi di fare il limite di questo per $\tau \to +\infty$.

Cambio di variabile per l'integrale indefinito: $t := \log x$, $dt = \frac{dx}{x}$.

$$\int \frac{dt}{1+e^{2t}-10e^{3t}} = -\int \frac{dx}{x(10x^3-x^2-1)} \ .$$

Fattorizzazione del polinomio a denominatore: il polinomio $10x^3 - x^2 - 1$ ha la radice $x = 1/2$ e quindi è divisibile per $(2x-1)$. Si ottiene infatti

$$x(10x^3-x^2-1) = x(2x-1)(5x^2+2x+1) \ .$$

Decomposizione in frazioni reali semplici: si determinano le costanti a, b, c, d tali che

$$\frac{1}{x(2x-1)(5x^2+2x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{2x-1} + \frac{cx+d}{5x^2+2x+1}$$

identificando i coefficienti dei polinomi in

$$1 = a(2x-1)(5x^2+2x+1) + bx(5x^2+2x+1) + (cx+d)x(2x-1) \ .$$

Ponendo $x = 0$ si trova $a = -1$; ponendo $x = 1/2$ si trova $b = 8/13$; dall'annullarsi dei coefficienti di grado 3 e 1 si ottiene rispettivamente $c = 45/13$ e $d = 8/13$.

Preparazione per l'integrazione con funzioni elementari: l'ultima frazione si decompone ulteriormente in somma di una derivata logaritmica P'/P e del reciproco di un trinomio di secondo grado:

$$\frac{45x+8}{13(5x^2+2x+1)} = \frac{90x+16}{26(5x^2+2x+1)} = \frac{9(10x+2)-2}{26(5x^2+2x+1)} =$$

$$= \frac{9}{26}\frac{10x+2}{5x^2+2x+1} - \frac{2}{26}\frac{1}{5x^2+2x+1}$$

$$= \frac{9}{26}\frac{10x+2}{5x^2+2x+1} - \frac{1}{26}\ \frac{5}{2}\ \frac{1}{\left(\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}\right)^2+1}$$

e in conclusione

$$-\frac{1}{x(10x^3-x^2-1)} = \frac{1}{x} - \frac{8}{13(2x-1)} - \frac{9}{26}\frac{10x+2}{5x^2+2x+1} + \frac{1}{26}\ \frac{5}{2}\ \frac{1}{\left(\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}\right)^2+1} \ .$$

Integrazione indefinita delle frazioni elementari:

$$-\int \frac{dx}{x(10x^3-x^2-1)} = \log x - \frac{4}{13}\log(2x-1) - \frac{9}{26}\log(5x^2+2x+1) + \frac{1}{26}\ \arctan\left(\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}\right) \ .$$

Calcolo dell'integrale definito fra 0 e $\tau = \log s$:

$$\int_0^\tau \frac{dt}{1+e^{2t}-10e^{3t}} = -\int_1^s \frac{dx}{x(10x^3-x^2-1)} =$$

$$= \left[\log x - \frac{4}{13}\log(2x-1) - \frac{9}{26}\log(5x^2+2x+1) + \frac{1}{26}\ \arctan\left(\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}\right)\right]_1^s .$$

Limite per $\tau = \log s \to +\infty$:

$$\int_0^\tau \frac{dt}{1+e^{2t}-10e^{3t}} = \log s - \frac{4}{13}\log(2s(1+o(1)) - \frac{9}{26}\log(5s^2(1+o(1)) + \frac{1}{26}\ \arctan\left(\frac{5}{2}s+\frac{1}{2}\right)+$$

$$+\frac{9}{26}\log(8) - \frac{1}{26}\ \arctan 3 =$$

$$-\frac{4}{13}\log(2) - \frac{9}{26}\log(5) + \frac{\pi}{52} + \frac{9}{26}\log(8) - \frac{1}{26}\ \arctan 3 + o(1) =$$

$$= \frac{19}{26}\log 2 - \frac{9}{26}\log 5 + \frac{\pi}{52} - \frac{1}{26}\arctan 3 + o(1)$$

cosicché

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+e^{2t}-10e^{3t}} = \frac{19}{26}\log 2 - \frac{9}{26}\log 5 + \frac{\pi}{52} - \frac{1}{26}\arctan 3 .$$

Esercizio 3. Determinare una costante $a \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$ tali che

$$\tan(\sin x) - \sin(\tan x) = ax^n + o(x^n) \qquad \text{per } x \to 0.$$

Soluzione. Entrambe le funzioni $\sin x$ e $\tan x$ sono dispari e hanno primo termine x nello sviluppo. Ci aspettiamo che alcuni termini di grado più basso nelle composizioni $\tan(\sin x)$ e $\sin(\tan x)$ siano uguali per effetti di simmetria: per questo conviene fare il conto della composizione una volta sola con sviluppi generici. Dati due sviluppi dispari

$$S := x + s_3x^3 + s_5x^5 + s_7x^7 + o(x^7)$$
$$T := x + t_3x^3 + t_5x^5 + t_7x^7 + o(x^7),$$

si trova

$$T(S(x)) = x + (t_3+s_3)x^3 + (3s_3t_3+s_5+t_5)x^5 + (3s_3^2t_3+5s_3t_5+3s_5t_3+s_7+t_7)x^7+o(x^7).$$

Poiché i termini fino all'ordine 5 sono simmetrici essi si cancellano nella differenza; inoltre scompaiono per simmetria anche i coefficienti s_7 e t_7. Si ha quindi

$$T(S(x) - S(T(x) = (3s_3^2t_3 - 3t_3^2s_3 + 5s_3t_5 - 5t_3s_5 + 3s_5t_3 - 3t_5s_3)x^7 + o(x^7).$$

Dunque nel caso in questione[1]

$$S(x) := \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + s_7x^7 + o(x^7)$$
$$T(x) := \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + t_7x^7 + o(x^7)$$
$$\tan(\sin x) - \sin(\tan x) = \frac{1}{30}x^7 + o(x^7)), \qquad \text{per } x \to 0 .$$

[1]Ricordiamo che i primi termini dello sviluppo di $\tan x$ si determinano facilmente usando le relazioni $(\tan x)' = 1 + (\tan x)^2$ oppure $(\cos x)(\tan x) = \sin x$.