Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni.

Appello di Analisi Matematica I del 04/07/2017. Soluzioni.

Esercizio 1. Per $\alpha > 0$ fissato studiare la funzione $f(x) = x^\alpha e^{-x}$ definita per $x > 0$. Dire quante sono le soluzioni $x > 0$ dell'equazione

$$\sin\left(x^\alpha e^{-x}\right) = 0$$

in funzione dell'esponente reale positivo α.

Soluzione. Per $\alpha > 0$ fissato la funzione $f(x) = x^\alpha e^{-x}$ ha un comportamento molto simile indipendentemente da α. Infatti si calcola subito che $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Poiché $f'(x) = (\alpha - x)x^{\alpha-1}e^{-x}$, la funzione $f(x)$ è strettamente crescente in $]0, \alpha[$ e strettamente decrescente in $]\alpha, +\infty[$, con valore massimo $f(\alpha) = \alpha^\alpha e^{-\alpha}$. Poiché $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, f applica bigettivamente gli intervalli $]0, \alpha[$ e $]\alpha, +\infty[$ su $]0, \alpha^\alpha e^{-\alpha}[$. L'equazione $\sin(f(x)) = 0$ è risolta esattamente dai valori di $x > 0$ per cui $f(x) := x^\alpha e^{-x}$ è un multiplo intero di π. Ci si chiede quindi per quali valori $k \in \mathbb{Z}$ si ha che $f(x) = k\pi$ ammette una soluzione x: questo è vero per $k\pi \in]0, \alpha^\alpha e^{-\alpha}] = Im(f)$. Nel caso in cui k verfichi questa appartenenza rimane da stabilire per quanti valori x diversi si abbia $f(x) = k\pi$. Dallo studio del grafico sopra si deduce che sono due le soluzioni distinte se $k\pi \in]0, \alpha^\alpha e^{-\alpha}[$ e solo la soluzione $x = \alpha$ se $k\pi = \alpha^\alpha e^{-\alpha}$. Si conclude che il numero di soluzioni dell'equazione proposta è $2\lfloor \frac{\alpha^\alpha e^{-\alpha}}{\pi} \rfloor$ se $\frac{\alpha^\alpha e^{-\alpha}}{\pi}$ non è un intero, ed è $2\lfloor \frac{\alpha^\alpha e^{-\alpha}}{\pi} \rfloor - 1$ se $\frac{\alpha^\alpha e^{-\alpha}}{\pi}$ è un intero.

Esercizio 2. Al variare del parametro reale positivo β, studiare la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\beta \sin\frac{\pi n^2}{n+1} \ .$$

Soluzione. Dalle identità

$$\sin\frac{\pi n^2}{n+1} = \sin\pi\frac{n^2-1+1}{n+1} = \sin\left(\pi(n-1) + \frac{\pi}{n+1}\right) = (-1)^{n-1}\sin\frac{\pi}{n+1},$$

si ha

$$\left|n^\beta \sin\frac{\pi n^2}{n+1}\right| = n^\beta \sin\frac{\pi}{n+1} = \pi n^{\beta-1}(1 + o(1))$$

per $n \to \infty$, e per confronto asintotico con una serie armonica generalizzata si ha subito che la serie *converge assolutamente se e solo se* $\beta < 0$, e che inoltre $\beta < 1$ *è condizione necessaria per la convergenza.* Dallo sviluppo di Taylor, per $x \to 0$

$$\sin\left(\frac{\pi\, x}{x+1}\right) = \pi\, x - \pi\, x^2 + o(x^2) = \pi\, x - (\pi + o(1))\, x^2,$$

ponendo $x = 1/n$ si trova

$$\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = \frac{\pi}{n} - \frac{\pi + o(1)}{n^2}$$

per $n \to +\infty$. Dunque per $\beta < 1$ la serie si può scrivere

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\beta \sin\frac{\pi n^2}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^\beta\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi + o(1)}{n^2}\right) =$$

$$= \pi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{\beta-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\pi + o(1))n^{\beta-2}$$

somma di una serie convergente per il criterio di Leibnitz e di una serie assolutamente convergente per confronto asintotico con una serie geometrica generalizzata[1]: dunque la condizione $\beta < 1$ *è anche sufficiente per la convergenza semplice.*

[1] si noti che il criterio di Leibnitz non si potrebbe applicare alla seconda serie, se non provando che il coefficiente è decrescente in valore assoluto.

Esercizio 3. Si consideri la successione (x_k) definita per ricorrenza a partire dal numero reale positivo γ:

$$\begin{cases} x_0 = \gamma \\ x_{k+1} = x_k \int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x_k s}}-1}{e^{\sqrt{x_k s}}+1} ds \end{cases}$$

Si studi l'esistenza del limite di x_k al variare di γ.

Soluzione. La funzione

$$f(x) = x \int_0^1 \frac{e^{\sqrt{xs}} - 1}{e^{\sqrt{xs}} + 1} ds = \int_0^x \frac{e^{\sqrt{t}} - 1}{e^{\sqrt{t}} + 1} dt$$

definita per $x \geq 0$, è continua e crescente essendo l'integrando positivo. Inoltre, poiché l'integrando è strettamente minore di 1 si ha $f(x) < x$ per ogni $x > 0$. Poiché $x_{k+1} = f(x_k)$ e $\gamma > 0$, la successione x_k generata è strettamente decrescente e converge a zero (se convergesse ad un valore positivo $u = \lim_k x_k$ si dovrebbe infatti verificare la relazione $f(u) = u > 0$, che è stata esclusa).

Variante: poiché l'integrando è compreso fra zero e uno, si ha che la successione x_k è positiva e decrescente, e in particolare è compresa fra 0 e γ. Siccome la funzione $\tanh t := \frac{e^t-1}{e^t+1}$ è crescente, l'integrale è minore di $c := \tanh \sqrt{\gamma} < 1$, così $x_{k+1} \leq c x_k$. Quindi $0 \leq x_k \leq c^k \gamma$, da cui $x_k \to 0$.