Esercizi per il Corso di Istituzioni di Matematica

Algebra lineare:matrici, indipendenza lineare, risoluzioni di sistemi.

1) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

scrivere le matrici AB, BA, $B^{-1}C$, $(A+C)B$ e calcolarne il determinante.

2) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

determinare il rango delle matrici A, B, AB, CA, BC, $(AB)C$.

3) Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione definita da

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3 - 5x_2, x_2 - 3x_3, x_3 - x_2 - x_1, x_1 + x_3).$$

(i) Determinare una base del $Ker(T)$;
(ii) determinare un vettore B tale che l'equazione $T(X) = B$ non abbia alcuna soluzione.

4) Dati i vettori $v_1 = (1, 2, -2\lambda)$, $v_2 = (\lambda + 1, -1 + \lambda, -3)$ dipendenti dal parametro $\lambda \in \mathbb{R}$
(i) determinare tutti i $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui v_1, v_2 sono linearmente indipendenti;
(ii) per $\lambda = 0$ completare i vettori v_1, v_2 ad una base di $\mathbb{R}^3$.

5) Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ la risolubilita' del sistema

$$\begin{cases} (a-1)x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ (a+4)x_1 + 4x_2 + (a-6)x_4 = a \\ (a-3)x_2 - 9x_3 + 4x_4 = -2 \end{cases}$$

In particolare determinare i valori a per cui: (i) il sistema non ha soluzione; (ii) il sistema ha infinite soluzioni. In questo secondo caso stabilire la struttura delle soluzioni, chiarendo da quanti parametri liberi esse dipendono, e se il sistema ha ancora soluzione se come termine noto si prende il vettore $(1, 0, 0, 1)$.

6) Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 3x_3 - x_2, 2x_2 - x_1 - 3x_3, 3x_3 - x_2 + x_1).$$

(i) Determinare una base di $R(T)$;
(ii) Determinare i vettori che appartengono a $Ker(T) \cap R(T)$;
(iii) determinare la matrice B che rappresenta l'applicazione $T \circ T$;
(iv) stabilire se $T \circ T$ è iniettiva e/o surgettiva.

7) Fare gii stessi punti dell'esercizio 6) con l'applicazione $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$S(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 3x_3 - x_2, 2x_2 - x_1 - 3x_3, 2x_3 - x_2 + x_1).$$

8) Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + (1 + a)x_3 + ax_2, (a - 1)x_2 + x_3 + x_1, 2ax_3 - ax_2 - 3x_1).$$

(i) Determinare la dimensione di $R(T)$ al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$;
(ii) per $a = -1$ determinare tutte le soluzioni di $T(X) = (1, 0, 1)$.

9) Sia V il sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$V = \{(s, s + 2t, t - s, -t) \, : \, t, s \in \mathbb{R}\}.$$

a) dimostrare che è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$;
b) determinarne una base;
c) completarla ad una base di $\mathbb{R}^4$.

10) Sia $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ definita per $z = (z_1, z_2)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ da

$$T(z) = T(z_1, z_2) = (z_1 - z_2, 2z_2 + 3z_1, z_2 + 2z_1).$$

(i) Dimostrare che T è lineare, cioè vale

$$T(\lambda z + \beta w) = \lambda T(z) + \beta T(w) \ \forall \lambda, \beta \in \mathbb{C}, \ \forall z, w \in \mathbb{C}^2$$

e che $Ker(T)$, $R(T)$ sono due sottospazi vettoriali, sul campo dei numeri complessi, di $\mathbb{C}^2$ e $\mathbb{C}^3$ rispettivamente;
(ii) determinare i vettori di $\mathbb{C}^2$ che appartengono a $Ker(T)$;
(iii) stabilire se T è iniettiva e/o surgettiva.