Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni.

UNIVERSITÀ DI PISA.

Prima prova scritta di Analisi Matematica I. Soluzioni.

Esercizio 1. Si consideri la successione $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita dalla relazione di ricorrenza

$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_{n+1} = \sin(-c_n)\,. \end{cases}$$

Si stabilisca se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ è convergente.

Soluzione. Poiché $\sin(x)$ è una funzione dispari si verifica per induzione che $c_n = (-1)^n a_n$, dove a_n è definita per ricorrenza da $a_0 := 1$ e $a_{n+1} = \sin(a_n)$. Poiché $0 < \sin(x) \le x$ per ogni $0 < x \le 1$, e $a_0 = 1$, si ha per induzione che $0 \le a_{n+1} \le a_n$ per ogni n. Dunque la successione a_n, decrescente e limitata, converge; poiché $\sin(x)$ è continua, il limite è un punto fisso di $\sin(x)$, dunque è 0, che è l'unico punto fisso di $\sin(x)$. In conclusione sono verificate le condizioni per il criterio di convergenza di Leibnitz, e la serie converge.

Esercizio 2. Si consideri la funzione $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

Si calcoli $\inf_{x>0} f(x)$, $\sup_{x>0} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$ e $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Soluzione. Poiché

$$f(x) = x\log(1+x) - x\log(x)\ ,$$

$$f'(x) = \log(1+x) - \log(x) - \frac{1}{x+1}\ ,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2}\ ,$$

la funzione f' è strettamente decrescente su $]0, +\infty[$, e

$$f'(x) > \lim_{x\to\infty} f'(x) = 0\ .$$

Quindi f è crescente e

$$\inf_{x>0} f(x) = \lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+} -x\log(x) + O(x) = 0\ ,$$

$$\sup_{x>0} f(x) = \lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+} x\Big(\frac{1}{x} + o\big(\frac{1}{x}\big)\Big) = 1\ .$$

Esercizio 3. Si studi la convergenza semplice e assoluta dell'integrale

$$\int_1^\infty \left(1 - \cos\sqrt{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right) dx\,.$$

Soluzione. Poiché $\cos(t) \le 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, l'integrando è non-negativo.

Dai noti sviluppi di Taylor in $t = 0$ per le funzioni $\cos(t)$ e $\log(1+t)$ si ha, per $x \to +\infty$

$$1 - \cos\sqrt{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 1 - \cos(x^{-1/2}(1+o(1)) = x^{-1}(1+o(1))$$

e per confronto asintotico si conclude che il valore dell'integrale improprio è $+\infty$.

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni.

UNIVERSITÀ DI PISA.

Seconda prova scritta di Analisi Matematica I. Soluzioni.

Esercizio 1. Si consideri la successione $(a_n)_{n\geq 1}$ definita dalla relazione di ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n - a_n^2/2\,. \end{cases}$$

Si dimostri per induzione che $\frac{1}{n} \leq a_n \leq \frac{2}{n}$ per ogni $n \geq 1$.

Soluzione. Intanto la disuguaglianza è verificata per $n = 1$ e $n = 2$ perché $a_1 = 1$ e $a_2 = 1/2$.

Osserviamo poi che la funzione $f(x) = x - x^2/2$ è crescente sull'intervallo $0 \leq x \leq 1$: ha infatti derivata $f'(x) = 1 - x \geq 0$ per $x \leq 1$. Perciò, per $n \geq 2$, dall'ipotesi induttiva $\frac{1}{n} \leq a_n \leq \frac{2}{n} \leq 1$ segue

$$f\Big(\frac{1}{n}\Big) \leq f(a_n) = a_{n+1} \leq f\Big(\frac{2}{n}\Big).$$

Basta quindi verificare che $f(1/n) \geq 1/(n+1)$ e $f(2/n) \leq 2/(n+1)$. Si ha infatti, per $n \geq 1$

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{1}{n}\Big) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} = \frac{2n-1}{2n^2} \\ &= \frac{1}{n+1}\frac{(n+1)(2n-1)}{2n^2} = \frac{1}{n+1}\frac{2n^2+n-1}{2n^2} \geq \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

e similmente

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{2}{n}\Big) &= \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} = \frac{2(n-1)}{n^2} \\ &= \frac{2}{n+1}\frac{n^2-1}{n^2} \leq \frac{2}{n+1}. \end{aligned}$$

Esercizio 2.

i. Si calcoli lo sviluppo di Taylor al terzo ordine, con centro in $x = 0$, per la funzione $u(x) := \cosh(x)$, e si scriva la corrispondente formula del resto secondo Lagrange.

ii. Si dia una condizione necessaria e sufficiente che identifichi i numeri reali c per cui la disuguaglianza

$$1 + \frac{x^2}{2} + cx^4 \leq \cosh(x)$$

sia verificata per ogni numero reale x.

Soluzione.

(i) Si ha $u(x) = u''(x) = u''''(x) = \cosh(x)$ e $u'(x) = u'''(x) = \sinh(x)$, quindi $u(0) = u''(0) = 1$ e $u'(0) = u'''(0) = 0$. Dunque il polinomio di Taylor richiesto è $1 + x^2/2$, e il resto corrispondente si esprime nella forma di Lagrange

$$\cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} = \frac{x^4}{24} \cosh(\xi) \ ,$$

per qualche numero ξ compreso fra 0 e x.

(ii) Poiché $\cosh(\xi) \geq 1$ qualunque sia $\xi \in \mathbb{R}$, lo sviluppo precedente implica che se $c \leq 1/24$ la disuguaglianza

$$1 + \frac{x^2}{2} + cx^4 \leq \cosh(x)$$

vale per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Viceversa, se per una costante $c \in \mathbb{R}$ la disuguaglianza

$$1 + \frac{x^2}{2} + cx^4 \leq \cosh(x)$$

vale per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha, per $x \to 0$,

$$1 + \frac{x^2}{2} + cx^4 \leq \cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4),$$

quindi

$$cx^4 \leq \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

e $c \leq 1/24 + o(1)$, dunque $c \leq 1/24$. La condizione necessaria e sufficiente richiesta è perciò

$$c \leq 1/24.$$

Esercizio 3.

Si valuti l'integrale improprio :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^7 e^{-x^2} \, dx.$$

Soluzione.

Poiché l'integrando è una funzione non negativa e pari, l'integrale ha un valore in $[0, +\infty]$, e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^7 e^{-x^2} \, dx = 2 \int_0^{+\infty} x^7 e^{-x^2} \, dx.$$

Con il cambio di variabile $u = x^2$, $du = 2xdx$ ci si riconduce all'integrale di Eulero

$$2 \int_0^{+\infty} x^7 e^{-x^2} \, dx = \int_0^{+\infty} u^3 e^{-u} \, du = 6.$$

(Il cambio di variabile si può giustificare per passaggio al limite).

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni.

Università di Pisa.

Terza prova scritta di Analisi Matematica I. Soluzioni.

Esercizio 1. Dire quante sono le soluzioni reali x dell'equazione

$$\sin(e^{-x^2+4x}) = 0,$$

trovarle, e calcolare la loro media aritmetica.

Soluzione.
Deve essere $e^{-x^2+4x} = k\pi$ con k intero, necessariamente positivo. Si ha quindi

$$x^2 - 4x + \log k\pi = 0$$

da cui segue che le soluzioni sono esattamente

$$x_k = 2 - \sqrt{4 - \log k\pi}$$
$$y_k = 2 + \sqrt{4 - \log k\pi}$$

con k intero, $1 \le k \le \lfloor e^4 \rfloor = 54$. Poiché il radicando non è mai nullo, esse sono tutte distinte e quindi 108. La media di ogni coppia x_k, y_k è 2, perciò tale è anche la media di tute le soluzioni.

Esercizio 2. Risolvere l'equazione differenziale $xu'(x) - u^2(x) = 1$ con la condizione $u(1) = \sqrt{3}$. Dire qual è il più grande intervallo $I \ni 1$ in cui esista questa soluzione.

Soluzione. L'equazione è del tipo a variabili separabili; scrivendola nella forma

$$\frac{u'}{1+u^2} = \frac{1}{x}$$

e integrando fra 1 e x si trova $\arctan(u(x)) - \arctan(u(1)) = \log(x)$ da cui, tenendo conto della condizione iniziale,

$$u(x) = \tan(\log(x) + \pi/3),$$

il cui intervallo massimo di definizione è dato dalle disuguaglianze $-\pi/2 < \log(x) + \pi/3 < \pi/2$, cioè l'intervallo $]e^{-5\pi/6}, e^{\pi/6}[$.

Esercizio 3.

Si provi che il seguente integrale improprio è convergente, e se ne calcoli il valore:

$$\int_0^\infty \left(\sin(x) - \sin\big(\frac{1}{x}\big) \right) \frac{1}{x}\, dx.$$

Soluzione.

È noto che integrale improprio

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

è convergente (si vede per esempio con una integrazione per parti). Perciò, con il cambio di variabile $y := 1/x$, $dy/y = -dx/x$, si ottiene che è convergente, allo stesso valore finito, anche l'integrale improprio

$$\int_0^\infty \sin\big(\frac{1}{y}\big)\frac{1}{y}\, dy$$

$$= \lim_{a\to 0} \int_a^1 \sin\big(\frac{1}{y}\big)\frac{1}{y}\, dy + \lim_{b\to\infty} \int_1^b \sin\big(\frac{1}{y}\big)\frac{1}{y}\, dy$$

$$= \lim_{a\to 0} \int_1^{1/a} \frac{\sin(x)}{x}\, dx + \lim_{b\to\infty} \int_{1/b}^1 \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

Si conclude che anche l'integrale proposto, differenza dei due, è convergente, e vale 0.

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni.

UNIVERSITÀ DI PISA.

Appello di Analisi Matematica I del 9-6-2015. Soluzioni.

Esercizio 1. Si dica se la funzione $f(x) := e^{\lambda x^2}\sqrt{\cos x}$ ha un massimo locale ovvero un minimo locale in $x = 0$, a seconda del valore del parametro reale λ.

Soluzione. Poiché $f(x)$ è positiva in un intorno di $x = 0$ e $y \mapsto y^2$ è crescente per $y > 0$, è sufficiente considerare $f(x)^2 := e^{2\lambda x^2}\cos x$. Dagli opportuni sviluppi di Taylor delle funzioni esponenziale e coseno,

$$e^{2\lambda x^2} = 1 + 2\lambda x^2 + 2\lambda^2 x^4 + o(x^4)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

si ottiene, moltiplicando gli sviluppi

$$f(x)^2 = 1 + \big(4\lambda - 1\big)\frac{x^2}{2} + \big(48\lambda^2 - 24\lambda + 1\big)\frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

Ne segue che per $\lambda < 1/4$ la funzione $f(x)^2$ è minore di 1 in un intorno di 0, dunque ha massimo locale per $x = 0$. Per $\lambda = 1/4$ vale $f(x)^2 = 1 - \frac{x^4}{12} + o(x^4))$, e la conclusione è la stessa. Per $\lambda > 1/4$ la funzione $f^2(x)$ ha minimo locale in $x = 0$. Dunque anche $f(x)$ ha in $x = 0$ un massimo locale se $\lambda \leq 1/4$ e un minimo locale se $\lambda > 1/4$.

Variante: Con un po' di calcoli in più si poteva anche calcolare lo sviluppo di $\sqrt{\cos x}$, per esempio componendo con il noto sviluppo del binomio $(1 + y)^\alpha$. Si trova:

$$\sqrt{\cos x} = 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + o(x^4)$$

e infine

$$e^{\lambda x^2}\sqrt{\cos x} = 1 - \left(\lambda - \frac{1}{4}\right)x^2 - \left(\frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda}{4} - \frac{1}{96}\right)x^4 + o(x^4)$$

e si conclude come sopra.

Esercizio 2. Si dica per quale valore di $t \in \mathbb{R}$ risulti massima la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}\exp(-nt^2).$$

Soluzione. Si tratta della serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}\exp(-nt^2) = \sum_{n=0}^{\infty}\big(t^2\exp(-t^2)\big)^n$, la cui somma è $\frac{1}{1-t^2\exp(-t^2)}$. Questa espressione è massima quando è massimo il termine $t^2\exp(-t^2)$, cioè per $t = \pm 1$. *Variante:* Ciascun termine della serie, $t^{2n}\exp(-nt^2) = \big(t^2\exp(-t^2)\big)^n$, è massimo per $t^2 = 1$, e vale e^{-n}. Corrispondentemente è anche massimo il valore della serie, cioè $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} = \frac{1}{1-1/e} = \frac{e}{e-1}$.

Esercizio 3. Si calcoli l'integrale improprio
$$\int_0^\infty \frac{du}{u^3+1} \ .$$

Soluzione. Dalla fattorizzione $u^3+1=(u+1)(u^2-u+1)$ si trova una decomposizione in frazioni semplici della forma
$$\frac{1}{u^3+1}=\frac{a}{u+1}+\frac{bu+c}{u^2-u+1}.$$
I coefficienti a, b, c si determinano dall'identità
$$1=a(u^2-u+1)+(bu+c)(u+1)=(a+b)u^2+(-a+b+c)u+(a+c)$$
da cui, uguagliando i coefficienti, si trova $a=1/3$, $b=-1/3$, e $c=2/3$. Si ha perciò
$$\frac{1}{u^3+1}=\frac{1}{3}\frac{1}{u+1}-\frac{1}{3}\frac{u-2}{u^2-u+1}.$$
Inoltre
$$\frac{1}{3}\frac{u-2}{u^2-u+1}=\frac{1}{6}\frac{2u-1}{u^2-u+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{u^2-u+1}$$
e $u^2-u+1=(u-1/2)^2+3/4$. Quindi
$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{du}{u^3+1}&=\frac{1}{3}\int_0^x\frac{du}{u+1}-\frac{1}{6}\int_0^x\frac{2u-1}{u^2-u+1}du+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{du}{(u-1/2)^2+3/4}\\ &=\frac{1}{3}\log(x+1)-\frac{1}{6}\log(x^2-x+1)+\frac{1}{2}\int_{-1/2}^{x-1/2}\frac{dv}{v^2+3/4}\\ &=\frac{1}{6}\log\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2v}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-1/2}^{x-1/2},\end{aligned}$$
da cui per $x\to+\infty$ si trova
$$\int_0^\infty\frac{du}{u^3+1}=\frac{\mathbf{2\sqrt{3}}}{\mathbf{9}}\pi.$$
Variante: si possono semplificare un po' i calcoli osservando che, col cambio di variabile $u=v^{-1}$, $du=-v^{-2}dv$, si ha
$$\int_0^\infty\frac{1}{u^3+1}du=-\int_\infty^0\frac{v^{-2}}{v^{-3}+1}dv=\int_0^\infty\frac{v}{v^3+1}dv.$$
Quindi
$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{du}{u^3+1}&=\frac{1}{2}\left(\int_0^\infty\frac{u}{u^3+1}du+\int_0^\infty\frac{1}{u^3+1}du\right)\\ &=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{u+1}{u^3+1}du=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{du}{u^2-u+1},\end{aligned}$$
e si conclude come sopra.

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni.

UNIVERSITÀ DI PISA.

Appello di Analisi Matematica I del 30-6-2015. Soluzioni.

Esercizio 1. Provare che $u^u > \sin u$ per ogni numero reale positivo u.

Soluzione. È sufficiente provare la disuguaglianza $u^u \geq u$ per ogni $u > 0$, perché è noto dalla teoria che $u > \sin u$ per ogni $u > 0$. Prendendo i logaritmi di entrambi i membri allora basta provare che $u \log u \geq \log u$ cioè

$$(u-1)\log u \geq 0,$$

la quale è certamente verificata per ogni $u > 0$, poiché i due fattori $(u-1)$ e $\log u$ hanno esattamente lo stesso segno per ogni $u > 0$, giacché $\log u$ è positivo per $u > 1$ e negativo per $u < 1$.
Oppure. La disuguaglianza $u^u \geq u$ segue anche dalla convessità della funzione $f(u) := u^u$ (a conti fatti $f''(u) = u^u\big(1/u + (1+\log u)^2\big) > 0$ per ogni $u > 0$). Quindi come è noto dalla teoria $f(u) \geq f(1) + f'(1)(u-1) = u$, che traduce il fatto che il grafico di f è sopra quello della sua retta tangente in $u = 1$).

Esercizio 2. Sia z il numero complesso $(\sqrt{3}+i)^{113}$.

(i) Stabilire il segno di $\operatorname{Re} z$ e di $\operatorname{Im} z$.
(ii) Stabilire se è maggiore $|\operatorname{Re} z|$ oppure $|\operatorname{Im} z|$.

Soluzione. In forma polare la base della potenza si scrive

$$\sqrt{3}+i = 2\big(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\big) = 2e^{i\pi/6}.$$

Scrivendo $113 = 19\cdot 6 - 1$ e ricordando che $e^{i\pi} = -1$ si trova

$$z = 2^{113}e^{113i\pi/6} = 2^{113}(e^{i\pi})^{19}e^{-i\pi/6} = -2^{113}e^{-i\pi/6} = 2^{112}(-\sqrt{3}+i)$$

da cui (i) $\operatorname{Re} z < 0 < \operatorname{Im} z$ e (ii) $|\operatorname{Re} z| > |\operatorname{Im} z|$.

Esercizio 3. Si consideri la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n+2}}{(n+1)^{n+3}}.$$

(i) Provarne la convergenza semplice.
(ii) Stabilire il segno della sua somma.
(iii) Studiarne la convergenza assoluta.

Soluzione. Conviene scrivere il termine generico della serie c_n nella forma:

$$c_n := \frac{(-n)^{n+2}}{(n+1)^{n+3}} = (-1)^n \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \frac{n^2}{(n+1)^3}.$$

Dallo studio della funzione $f(x) := x^2(x+1)^{-3}$, che ha derivata $f'(x) = (2-x)x(x+1)^{-4}$, si ha che il termine $\frac{n^2}{(n+1)^3}$ è decrescente per $n \geq 2$. Inoltre è noto dalla teoria che la successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è crescente e converge al numero e. Si conclude che il termine generale della serie c_n ha segno alterno, è decrescente in valore assoluto per $n \geq 2$, ed è infinitesimo per $n \to \infty$: precisamente $|c_n| = \frac{1}{ne}(1+o(1))$. Si può quindi applicare il criterio di Leibnitz e si deduce che la serie converge (i). Il criterio di Leibnitz afferma anche che le somme parziali di ordine pari (in questo caso maggiore di 2) maggiorano la somma della serie: si trova quindi (ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n+2}}{(n+1)^{n+3}} \leq -\frac{1}{2^4} + \frac{2^4}{3^5} - \frac{3^5}{4^6} + \frac{4^6}{5^7} < 0.$$

Infine (iii) la stima già provata $|c_n| = \frac{1}{ne}(1+o(1))$ implica che la serie non converge assolutamente, per confronto asintotico con la serie armonica.

Oppure. La decrescenza di $|c_n| := \frac{n^{n+2}}{(n+1)^{n+3}}$ per $n \geq 2$, necessaria per verificare le ipotesi del criterio di Leibnitz, si può anche provare direttamente con lo studio della funzione $g(x) := \frac{x^{x+2}}{(x+1)^{x+3}}$, provando che la derivata $g'(x)$ è negativa per $x \geq 2$.

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni.

Università di Pisa.

Appello di Analisi Matematica I del 21-07-2015. Soluzioni.

Esercizio 1. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\Big(\sin(1/x) - \tan(1/x)\Big).$$

Soluzione. Dai noti sviluppi di Taylor in $t=0$ della funzione seno e della funzione tangente

$$\sin t = t - t^3/6 + o(t^3)$$
$$\tan t = t + t^3/3 + o(t^3)$$

si ha subito, per $x \to +\infty$,

$$x^3\big(\sin(1/x) - \tan(1/x)\big) = x^3\big(-1/6x^3 - 1/3x^3 + o(1/x^3))\big) = -1/2 + o(1),$$

per cui il limite cercato vale $-1/2$.

Oppure: ponendo $t := 1/x$ si scrive

$$\sin t - \tan t = \sin t\Big(1 - \frac{1}{\cos t}\Big) = \sin t \cdot \frac{\cos t - 1}{\cos t}$$

e quindi

$$t^{-3}\Big(\sin t - \tan t\Big) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^3 \frac{\cos t - 1}{(\sin t)^2 \cos t} = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^3 \frac{\cos t - 1}{\big(1-\cos^2 t\big)\cos t}$$

$$= -\left(\frac{\sin t}{t}\right)^3 \frac{1}{\big(1+\cos t\big)\cos t},$$

da cui è immediato ricavare il limite $-1/2$ per $t \to 0$.

Esercizio 2. Si consideri la successione $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita dalla relazione di ricorrenza

$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_{n+1} = 2 + \log(c_n)\,. \end{cases}$$

Provare che essa converge a un numero c. Calcolare la parte intera di c.

Soluzione. La funzione $f(x) := 2 + \log(x)$ applica l'intervallo $[1, +\infty)$ in sé; è continua e strettamente crescente. È immediato verificare che $c_1 = f(c_0) > c_0$. Come è noto ciò implica che la successione (c_n) è crescente, e converge al più piccolo dei punti fissi di f a destra di c_0, se ne esistono, altrimenti diverge a $+\infty$. In effetti la funzione f ha un unico punto fisso c sull'intervallo $[1, +\infty)$: infatti sull'intervallo $[1, +\infty)$ la funzione $g(x) := f(x) - x$ è strettamente decrescente (ha derivata $g'(x) = 1/x - 1$ negativa dappertutto su tale intervallo) e cambia segno : si ha infatti $g(1) = 1 > 0$ e $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$. Dunque per il teorema degli zeri $g(x)$ si annulla in un punto $x = c$ (unico, perché g è strettamente decrescente). Ciò basta per affermare che c_n converge al valore c (primo punto fisso a destra di c_0). Infine, poiché $2 < e < 3$ si ha $\log 2 < 1 < \log 3$ quindi $g(3) = 2 + \log 3 - 3 = \log 3 - 1 > 0$ mentre $g(4) = 2 + \log 4 - 4 = 2(\log 2 - 1) < 0$. Sempre per il teorema degli zeri allora $3 < c < 4$, pertanto la parte intera di c è $\lfloor c \rfloor = 3$.

Oppure: Si può provare direttamente per induzione che $c_n < c_{n+1} \leq 4$ (il passo base è ovvio e per il passo induttivo basta applicare la funzione crescente f alla disuguaglianza), da cui segue l'esistenza di un limite $c \leq 4$ che risolve $c = 2 + \log(c)$. Si ha poi per calcolo diretto, tenendo conto che c_n è crescente, $3 \leq c_3 \leq c = 2 + \log(c) \leq 2 + \log(4) < 4$ da cui $\lfloor c \rfloor = 3$.

Esercizio 3. Si calcoli il valore dell'integrale definito:

$$\int_0^1 \frac{dt}{t - 2t^{1/3} + 4}.$$

Soluzione. Con il cambio di variabile $t = x^3$, $dt = 3x^2dx$ ci si riconduce all'integrale di una funzione razionale:

$$\int_0^1 \frac{dt}{t - 2t^{1/3} + 4} = \int_0^1 \frac{3x^2}{x^3 - 2x + 4}dx.$$

Si osserva che $x = -2$ è una radice del denominatore, per cui dividendo si fattorizza $x^3 - 2x + 4 = (x + 2)(x^2 - 2x + 2)$. L'integrando si può decomporre in frazioni semplici nella forma:

$$\frac{3x^2}{x^3 - 2x + 4} = \frac{a}{x + 2} + \frac{bx + c}{x^2 - 2x + 2},$$

e le costanti si determinano uguagliando i coefficienti in

$$3x^2 = a(x^2 - 2x + 2) + (bx + c)(x + 2),$$

che conduce al sistema lineare regolare

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ -2a + 2b + c = 0 \\ 2a + 2c = 0\,. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si determinano i coefficienti :

$$\begin{cases} a = 6/5 \\ b = 9/5 \\ c = -6/5\,. \end{cases}$$

Si scrive quindi

$$\frac{3x^2}{x^3 - 2x + 4} = \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{x + 2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{9x - 6}{x^2 - 2x + 2} =$$

$$= \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{x + 2} + \frac{9}{10} \cdot \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{(x - 1)^2 + 1} =$$

$$= \left(\frac{6}{5}\log(x + 2) + \frac{9}{10}\log(x^2 - 2x + 2) + \frac{3}{5}\arctan(x - 1)\right)'.$$

Si trova perciò

$$\int_0^1 \frac{3x^2}{x^3 - 2x + 4}dx = \left[\frac{6}{5}\log(x + 2) + \frac{9}{10}\log(x^2 - 2x + 2) + \frac{3}{5}\arctan(x - 1)\right]_{x=0}^{x=1} =$$

$$= \frac{6}{5}\log(3) - \frac{6}{5}\log(2) - \frac{9}{10}\log(2) - \frac{3}{5}\arctan(-1) =$$

$$= \frac{6}{5}\log(3) - \frac{21}{10}\log(2) + \frac{3}{20}\pi.$$

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni.

UNIVERSITÀ DI PISA.

Appello di Analisi Matematica I del 14-09-2015. Soluzioni.

Esercizio 1. Discutere la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\Big(1-(-1)^n n^{-\lambda}\Big),$$

al variare del parametro $\lambda > 0$.

Soluzione. Dal noto sviluppo di Taylor al second'ordine di $\log(1+x)$ con resto secondo Peano,

$$\log\Big(1+x\Big) = x - x^2/2 + o(x^2) = x - \big(1/2 + o(1)\big)x^2, \qquad (x \to 0)$$

ponendo $x = -(-1)^n n^{-\lambda}$ e quindi $x^2 = n^{-2\lambda}$ si ha uno sviluppo asintotico del termine generico:

$$\log\Big(1-(-1)^n n^{-\lambda}\Big) = -(-1)^n n^{-\lambda} - (1/2 + o(1))n^{-2\lambda}. \qquad (n \to \infty)$$

Quindi la serie si scrive come somma di due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\Big(1-(-1)^n n^{-\lambda}\Big) = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-\lambda} - \sum_{n=1}^{\infty}(1/2 + o(1))n^{-2\lambda}$$

la prima convergente semplicemente, per il criterio di Leibnitz, per ogni $\lambda > 0$, la seconda, a termini positivi, convergente per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata se e solo se $2\lambda > 1$. Dunque la serie proposta converge semplicemente se e solo se $\lambda > 1/2$.
Riguardo alla convergenza assoluta della serie considerata, basta osservare che

$$\left|\log\Big(1-(-1)^n n^{-\lambda}\Big)\right| = \big(1+o(1)\big)n^{-\lambda}, \qquad (n \to \infty)$$

e si ha quindi, di nuovo per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, che essa converge assolutamente se e solo se $\lambda > 1$.

Esercizio 2. Sia $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la funzione

$$g(x) := \frac{(x + \sin x)^e}{e^{x+\sin x}}.$$

(i) Si provi che g assume valore massimo nel suo dominio, e lo si calcoli.
(ii) In quanti punti x del dominio è realizzato questo valore massimo?

Soluzione. Poiché la funzione $x \mapsto x + \sin x$ è bigettiva da $[0, +\infty[$ in $[0, +\infty[$, ponendo $y := x + \sin x$ è equivalente rispondere alle domande per la funzione più semplice $h(y) = y^e/e^y$, definita per $y \geq 0$. Poiché $h'(y) = (e - y)e^{-y+e-1}$ la funzione h è strettamente crescente sull'intervallo $[0, e]$ e strettamente decrescente sull'intervallo $[e, +\infty)$. Dunque la funzione h ammette un unico punto di massimo, nel punto $y = e$, corrispondente al valore massimo 1; quindi anche la funzione g ammette un unico punto di massimo $x_0 \geq 0$, caratterizzato come l'unica soluzione di $x + \sin x = e$.

Variante. Si può anche trattare direttamente la funzione $g(x)$, studiando il segno della sua derivata,

$$g'(x) = (1 + \cos x)(e - x - \sin x)e^{-x-\sin x+e-1}.$$

Poiché $1 + \cos x \geq 0$ per ogni x, si ha che g è strettamente crescente sull'intervallo $[0, x - 0]$ e strettamente decrescente sull'intervallo $[x_0, +\infty)$. Si noti che il solo insieme (infinito) degli zeri di $g'(x)$ non fornisce informazioni sufficienti per concludere.

Esercizio 3. Si studi la convergenza semplice e assoluta dell'integrale improprio

$$\int_0^\infty t^2(t^5 + 1)^{-1/2} \sin(t)dt.$$

Soluzione. La funzione $f(t) := t^2(t^5 + 1)^{-1/2}$ è positiva sull'intervallo di integrazione $[0, +\infty)$; è infinitesima per $t \to +\infty$: più precisamente per $t \to +\infty$ vale $f(t) = t^{-1/2}(1 + o(1))$; ha derivata $f'(t) = 2t(t^5 + 1)^{-1/2} - (5/2)t^6(t^5 + 1)^{-1/2-1} = 2t(4 - t^5)(t^5 + 1)^{-5/2}$, che è negativa per $t > 4^{1/5}$. Come è noto dalla teoria ciò garantisce la convergenza semplice dell'integrale improprio $\int_0^\infty f(t) \sin(t)dt$ (segue integrando per parti l'integrale su $[0, T]$ e facendo poi tendere T a $+\infty$).

Inoltre $\int_0^\infty |f(t) \sin(t)|dt$ diverge. Per questo serve ricordare la stima vista $f(t) = t^{-1/2}(1 + o(1))$ e osservare che in ogni intervallo $[(k-1)\pi, k\pi]$ la funzione $|\sin x|$ è maggiore o uguale a $1/2$ in un sottointervallo di lunghezza $2\pi/3$. Si ha quindi

$$\int_0^{n\pi} |f(t) \sin(t)|dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |f(t) \sin(t)|dt \geq C \sum_{k=1}^{n} k^{-1/2},$$

che diverge per $n \to \infty$.