Pisa, 06/02/2017 Nome, Cognome, Matricola

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Pisa.

Seconda prova scritta di Analisi Matematica I

Consegnare il testo, e un **unico** *foglio in bella copia, senza la minuta. Le risposte ai quesiti devono essere accompagnate dalle opportune motivazioni teoriche e dai calcoli necessari.*

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (x + \frac{x^2}{2})e^{-x}$.

(i) Dire quante soluzioni ha l'equazione

$$f(x) = \lambda$$

al variare del dato $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Provare che esiste un unico $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \lambda^*$ ha tre soluzioni $x_1 < x_2 < x_3$ equidistanziate, cioè tali che

$$\begin{cases} f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = \lambda^* \\ x_3 - x_2 = x_2 - x_1 > 0 \end{cases}$$

(iii) Provare che $0 < \lambda^* < 1$.

Esercizio 2. Dire se è convergente l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + e^{2t} - 10e^{3t}} dt$$

e in caso affermativo, calcolarlo.

Esercizio 3. Determinare una costante $a \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$ tali che

$$\tan(\sin x) - \sin(\tan x) = ax^n + o(x^n)) \qquad \text{per } x \to 0.$$