Risoluzione test ①

1) Calcolare, se esiste, $\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \dfrac{e^{xy}-\cos(x+y)}{x^2+y^2}$

si utilizzano i seguenti sviluppi di e^t e $\cos(t)$ in $t=0$:

$$e^t = 1+t+o(t)\quad,\quad \cos(t) = 1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)$$

$\leadsto$ $e^{xy} = 1+x\cdot y+o(x\cdot y)$, $\cos(x+y) = 1-\dfrac{(x+y)^2}{2}+o((x+y)^2)$

Ricordando che $o(t) = t\,o(1)$, $o(t^2) = t^2 o(1)$

dove $o(1)$ è un infinitesimo per $t\to 0$ e sostituendo si ottiene

$$e^{xy}-\cos(x+y) = 1+xy+(xy)^2 o(1) - 1 + \frac{(x+y)^2}{2} + (x+y)^2 o(1)$$

$$= xy + \frac{x^2+y^2+2xy}{2} + \left[(xy)^2+(x+y)^2\right] o(1)$$

$$= 2x\cdot y + \frac{x^2+y^2}{2} + o(1)\left[x^2y^2+x^2+y^2+2xy\right]$$

Dividendo tutto per x^2+y^2 si ottiene

$$\frac{e^{xy}-\cos(x+y)}{x^2+y^2} = \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{1}{2} + o(1)\Big[\underbrace{\frac{2xy}{x^2+y^2}+1+\frac{(xy)^2}{x^2+y^2}}\Big]$$

$\dfrac{2xy}{x^2+y^2} \downarrow$ non ammette limite per $(x,y)\to(0,0)$

$\dfrac{1}{2} \downarrow \dfrac{1}{2}$

$o(1) \downarrow$ 0 per $(x,y)\to(0,0)$

questo è limitato per $(x,y)\mapsto(0,0)$

per vedere che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ non esiste basta considerare le restrizioni a $y=x$ oppure $y=-x$.

Concludendo il limite cercato non esiste.

2) Data la curva $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) = (\cos(2t), t+\sin(t), e^t)$$

scrivere l'eq. della retta tangente a γ in $\gamma(\pi)$.

Il punto $\gamma(\pi)$ è il punto $(\cos(2\pi), \pi+\sin(\pi), e^\pi) =$

$$= (1, \pi, e^\pi) = P_0$$

l'eq. parametrica della retta tangente è

$$\{ \gamma(\pi) + \gamma'(\pi)\cdot t \ : \ t \in \mathbb{R} \} =: \underline{r}(P_0)$$

Poiché $\gamma'(t) = (-2\sin(2t), 1+\cos(t), e^t)$

si ha $\gamma'(\pi) = (0, 0, e^\pi)$ da cui

$$\underline{r}(P_0) = \left\{ P_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^\pi \end{pmatrix} t \ : \ t \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \pi \\ e^\pi + t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$ (a meno di chiamare $t' = e^\pi t$ è la stessa eq. sommata)

a livello di equazione cartesiana la retta tangente si scrive come $\begin{cases} x = 1 \\ y = \pi \end{cases}$ e z libera

3) Parametrizzare la porzione del cilindro

$$C = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + z^2 = 4 \}$$

compresa tra i piani $y = -3$ ed $y = 0$.

L'insieme è descritto come

$$\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -3 \leq y \leq 0 \text{ e } (x-1)^2 + z^2 = 4 \}$$

ossia y varia nell'intervallo $[-3, 0]$ ed $(x, z) \in$ circonferenza di centro $(1, 0)$ e raggio 2 (visto nel piano (x, z))

$\rightsquigarrow \quad \varphi : [0, 2\pi] \times [-3, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\varphi(u, v) = \underset{x}{(1 + 2\cos(u)}, \underset{y}{v}, \underset{z}{2\sin(u))}$$

Si verifica subito che $(x-1)^2 + z^2 = 4$ e $y \in [-3, 0]$.

4) Trovare il piano tangente alla superficie data da

$$x^2 - 8y + \ln(z^2 + 1) = 1$$

nel punto $P = (1, 0, 0)$.

E' noto che il piano tangente in P alla superficie descritta localmente da $\{ f(x,y,z) = f(P) \}$ è dato da $\Pi = \{ (x,y,z) : \langle (x,y,z) - P, \nabla f(P) \rangle = 0 \}$

Poiche' $\nabla f(x,y,z) = \left(2x, -8, \frac{2z}{z^2+1} \right)$

si ha $\nabla f(1,0,0) = (2,-8,0)$

$$\Longrightarrow \quad \Pi = \{ (x,y,z) : \langle (x-1, y, z), (2,-8,0) \rangle = 0 \} =$$

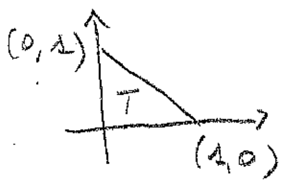
$$= \{ (x,y,z) : \quad 2(x-1) = 8y \}$$

lo stesso risultato si poteva ottenere considerando la superficie descritta da $8y = x^2 + \ln(z^2+1)$ ed ottenendo la parametrizzazione locale in P:

$$\varphi(x;z) = (x, x^2 + \ln(z^2+1), z)$$

e scrivendo $\Pi = \left\{ P + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(P) + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z}(P) : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$.

5) Calcolare $\iint_T x y^2 \, dx \, dy$ dove T è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.



il triangolo T è descritto da

$$T = \{ (x,y) : 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1-x \}$$

$$\iint_T x y^2 \, dx \, dy = \int_0^1 x \, dx \int_0^{1-x} y^2 \, dy = \int_0^1 x \left(\frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{3} (1-x)^3 \, dx = \int_0^1 \frac{x}{3} \left(1 - x^3 + 3x^2 - 3x \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{3} \left[x - x^4 + 3x^3 - 3x^2 \right] dx = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} + \frac{3}{4} x^4 - x^3 \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{3}{4} - 1 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{60}$$

6) Calcolare la divergenza di

$$F(x,y,z) = \left(e^{z \cos(x+y)}, \arctan(x \cdot y \cdot z), z^2 \sqrt{y^2+1} \right)$$

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = -z \sin(x+y) \, e^{z \cos(x+y)} +$$

$$+ \frac{xz}{1 + x^2 y^2 z^2} + 2z \sqrt{y^2+1} .$$

Risoluzione test ②

1) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2+\sin(x-y)-e^{x}-e^{-y}}{x^2+y^2}$$

Si usano i seguenti sviluppi di $\sin(t)$, e^{t}, e^{-t}

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) = t + o(t^2) = t + t^2 o(1)$$

$$e^{t} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad , \quad e^{-t} = 1 - t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

$$\Longrightarrow 2 + \sin(x-y) - e^{x} - e^{y} = 2 + (x-y) + (x-y)^2 o(1) +$$

$$- 1 - x - \frac{x^2}{2} + x^2 \cdot o(1) - 1 + y - \frac{y^2}{2} + y^2 \cdot o(1) =$$

$$= (x^2+y^2-2xy)\, o(1) - \frac{x^2+y^2}{2} + x^2 \cdot o(1) + y^2 o(1)$$

Dividendo tutto per x^2+y^2 si ottiene

$$\frac{2+\sin(x-y)-e^{x}-e^{-y}}{x^2+y^2} = -\frac{1}{2} + o(1) \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} -\frac{1}{2}$$

(si è usato che $\frac{x^2}{x^2+y^2}$, $\frac{y^2}{x^2+y^2}$, $\frac{x^2+y^2-2xy}{x^2+y^2}$ sono quantità limitate)

$$\Longrightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2+\sin(x-y)-e^{x}-e^{-y}}{x^2+y^2} = -\frac{1}{2}$$

2) Data $\gamma(t) = (\sin(2t), t + \cos(t), e^t)$ calcolare la retta tangente nel punto $\gamma(\pi)$.

Il punto $P = \gamma(\pi) = (0, \pi - 1, e^\pi)$ ha retta tangente

$$\underline{r}(P) = \{ P + \gamma'(\pi)t : t \in \mathbb{R} \}$$

$$\gamma'(t) = (2\cos(2t), 1 - \sin(t), e^t)$$

$\Longrightarrow$ $\gamma'(\pi) = (2, 1, e^\pi)$ $\Longrightarrow$ in forma parametrica

$$\underline{r}(P) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \pi - 1 \\ e^\pi \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ e^\pi \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

3) Parametrizzare la porzione del cilindro $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (y-1)^2 + z^2 = 4\}$ compresa tra $x = -2$ e $x = 0$.

Analogamente a quanto fatto nel test ① si ottiene la parametrizzazione $\varphi : [-2, 0] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\varphi(u, v) = (u, 1 + 2\cos(v), 2\sin(v)).$$

4) Trovare il piano tangente in $P = (0, 0, 1)$ alla superficie descritta da $z^2 - 8y + \ln(x^2 + 1) = 1$.

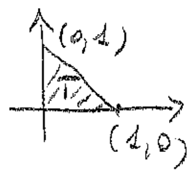
Analogamente a quanto fatto nel test 1 si calcola

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+1}, -8, 2z\right) \quad \text{dove} \quad f(x,y,z) = z^2 - 8y + \ln(x^2+1)$$

da cui si ottiene $\Pi_p = \{ (x,y,z) : \langle (x,y,z-1), (0,-8,2) \rangle = 0 \}$

$$= \{ (x,y,z) : -8y + 2(z-1) = 0 \}$$

5) Calcolare $\iint_T x^2 y \, dx\, dy$ dove T



$$\iint_T x^2 y \, dx\, dy = \int_0^1 x^2 dx \int_0^{1-x} y\, dy = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{2} (1-x)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + x^4 - 2x^3) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \right) = \frac{6+10-15}{60} = \frac{1}{60}$$

6) Calcolare la divergenza di

$$F(x,y,z) = \left(\arctan(xyz), e^{z\cos(x+y)}, z^2 \sqrt{y^2+1} \right).$$

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{y \cdot z}{1 + x^2 y^2 z^2} +$$

$$- z \sin(x+y) e^{z\cos(x+y)} + 2z\sqrt{y^2+1}.$$

Risoluzione test (3)

1) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{2+\sin(x+y)-e^x-e^y}{x^2+y^2}.$$

Si usano gli sviluppi di e^t e di $\sin(t)$ in $t=0$:

$$\sin(t) = t + o(t^2) = t + t^2 o(1)$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + t^2 o(1)$$

$$\leadsto 2+\sin(x+y)-e^x-e^y = 2 + (x+y) + (x+y)^2 o(1) - 1 - x - \frac{x^2}{2}$$

$$+ x^2 o(1) - 1 - y - \frac{y^2}{2} + y^2 o(1) =$$

$$= (x+y) - x - y - \frac{x^2+y^2}{2} + (x^2+y^2+2xy)\,o(1) + (x^2+y^2)\,o(1)$$

Dividendo per x^2+y^2 si ottiene:

$$\frac{2+\sin(x+y)-e^x-e^y}{x^2+y^2} = -\frac{1}{2} + o(1) \xrightarrow[(x,y)\mapsto(0,0)]{} -\frac{1}{2}$$

$$\leadsto \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2+\sin(x+y)-e^x-e^y}{x^2+y^2} = -\frac{1}{2}$$

[Si è usato che le quantità $\frac{x^2}{x^2+y^2}$, $\frac{y^2}{x^2+y^2}$, $\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ sono limitate e moltiplicate per un infinitesimo].

2) Data $\gamma(t) = (\cos(t), e^t, 2t + \sin(2t))$ scrivere l'eq. della retta tangente in $\gamma(\pi)$.

Si ha $P = \gamma(\pi) = (-1, e^\pi, 2\pi)$,

$\gamma'(t) = (-\sin(t), e^t, 2 + 2\cos(2t)) \rightsquigarrow \gamma'(\pi) = (0, e^\pi, 4)$

$\rightsquigarrow \underline{r}(P) = \{ P + \gamma'(\pi)t : t \in \mathbb{R} \} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ e^\pi(t+1) \\ 2\pi + 4t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$.

3) Parametrizzare la porzione del cilindro
$\mathcal{C} = \{(x,y,z) : (x+1)^2 + z^2 = 4\}$ compresa tra $y=0$ ed $y=2$.

Analogamente a quanto dedotto nel test 1 si ha
$\varphi : [0, 2\pi] \times [0,2] \to \mathbb{R}^3$ data da

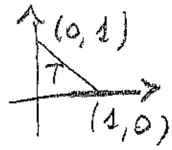
$$\varphi(u,v) = (-1 + 2\cos(u), v, 2\sin(u)).$$

4) Calcolare il piano tangente in $P = (1,0,0)$ alla sup.

$$x^2 - 8z + \ln(y^2+1) = 1.$$

Analogamente a quanto fatto nel test 1
si calcola $\nabla f = \left(2x, \frac{2y}{y^2+1}, -8\right)$ in $P = (1,0,0)$

$\rightsquigarrow \Pi_p = \{(x,y,z) : \langle (x-1, y, z), (2, 0, -8) \rangle = 0\} =$
$= \{(x,y,z) : 2(x-1) = 8z\}$.

5) Calcolare $\iint_T xy\,dx\,dy$ dove T 

$$\iint_T xy\,dx\,dy = \int_0^1 x\,dx \int_0^{1-x} y\,dy = \int_0^1 x \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{2}(1-x)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x + x^3 - 2x^2)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{24}$$

6) Calcolare la divergenza di

$$F(x,y,z) = \left(e^{z\cos(x+y)},\ z^2\sqrt{y^2+1},\ \arctan(xyz)\right)$$

$$\operatorname{div} F(x,y,z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} =$$

$$-z\sin(x+y)\,e^{z\cos(x+y)} + \frac{z^2 y}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{xy}{1+x^2y^2z^2}$$