Soluzioni del test n 1.

09.09.13

2. Data $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y,z) = x \sin(xyz)$$

si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \sin(xyz) + xyz\cos(xyz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x^2 z\cos(xyz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = x^2 y\cos(xyz)$$

da cui

$$\nabla f(x,y,z) = \big(\sin(xyz) + xyz\cos(xyz),\ x^2 z\cos(xyz),\ x^2 y\cos(xyz)\big)$$

3. Sia $y = f(x)$ la funzione definita implicitamente dall'equazione

$$y - x + e^{2y} = 0$$

in un intorno del punto $P = (1,0)$.

Posto $F(x,y) = y+x-e^{2y}$, si ha che F è di classe C^1, $F(1,0)=0$ e

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 1+2e^0 = 3 \neq 0.$$

Per il teorema del Dini $y=f(x)$ è pertanto definita su un intorno di P e si ha

$$f'(1) = -\frac{\partial F}{\partial x}(1,0) \Big/ \frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = -1/3.$$

4. La curva $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) = (t, \cos t, \sin t)$$

è regolare. Inoltre

$$\gamma'(t) = (1, -\sin t, \cos t).$$

Il lavoro del campo vettoriale

$$\mathbb{F}(x,y,z) = (3x+y, y, z)$$

lungo γ è pertanto $\int_0^{2\pi} \langle \mathbb{F}, \gamma' \rangle \, dt =$

$$= \int_0^{2\pi} \langle (3t+\cos t, \cos t, \sin t), (1, -\sin t, \cos t) \rangle \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (3t + \cos t)\, dt = \left[3t^2/2\right]_0^{2\pi} = 6\pi^2.$$

5. L'insieme

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le y \le 1,\ x^2 + z^2 \le 4 - y^4\}$$

è un solido di rotazione rispetto all'asse y. Posto

$$C(y) = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + z^2 \le 4 - y^4\}$$

si ha allora

$$\iint_{C(y)} dx\,dz = \pi(4 - y^4)$$

ed il volume di C è pertanto

$$\iiint_C dx\,dy\,dz = \int_0^1 dy \iint_{C(y)} dx\,dz =$$

$$= \pi \int_0^1 (4 - y^4)\, dy = \pi\left(4 - \left[y^5/5\right]_0^1\right) = 19\pi/5.$$

6. La superficie Σ, di parametrizzazione data da

$$\phi : A = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2 \le 1\} \to \mathbb{R}^3$$

con
$$\phi(u,v) = (u, v, u+v)$$

è cartesiana. Dunque l'area di Σ è

$$\iint_A \sqrt{1+(D_1\phi)^2+(D_2\phi)^2}\, du\, dv =$$

$$= \sqrt{3} \iint_A du\, dv = \pi\sqrt{3}$$