PRIMA PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA II

Pisa, 06.06.13

SOLUZIONI

2. Calcolare, se esiste, il

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3 + x^2\cos y + 2x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad .$$

Per $0 < x^2 + y^2 \le 1$ si ha

$$0 \le |y|^3 \le y^2 \le x^2 + y^2 \quad , \quad 0 \le x^2 \cos y \le x^2 \le x^2 + y^2$$
$$0 \le 2x^2|y| \le 2x^2 \le 2(x^2+y^2)$$

da cui segue

$$0 \ \le \ \frac{|y^3 + x^2\cos y + 2x^2 y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \ \le \ \frac{4(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \ \le \ 4\sqrt{x^2+y^2} \ \to \ 0$$

quando $(x,y) \to (0,0)$. Pertanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3 + x^2\cos y + 2x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} \ = \ 0 \quad .$$

In modo del tutto analogo si mostra che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y + y\sin y + x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \ = \ 0 \quad .$$

3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y,z) = xz + x^2 z - x - \sin(y^2) \quad .$$

Dire se il punto $P = (0,0,1)$ è per f

(a) di massimo locale (b) di minimo locale

(c) di sella (d) né di massimo, né di minimo, né di sella.

Osserviamo che f è di classe C^2 e che le sue derivate parziali prime

$$D_1 f(x,y,z) = z + 2xz - 1 \quad , \quad D_2 f(x,y,z) = -2y\cos(y^2) \quad , \quad D_3 f(x,y,z) = x + x^2$$

si annullano contemporaneamente nel punto $P = (0,0,1)$, che è pertanto stazionario. Si ha poi

$$
\begin{aligned}
D_{1,1}f(x,y,z) = 2z \quad , \quad D_{1,2}f(x,y,z) &= D_{2,1}f(x,y,z) = 0 \\
D_{1,3}f(x,y,z) &= D_{3,1}f(x,y,z) = 1 + 2x \quad , \quad D_{2,2}f(x,y,z) = 4y^2\sin(y^2) - 2\cos(y^2)\big) \\
D_{2,3}f(x,y,z) &= D_{3,2}f(x,y,z) = 0 \quad , \quad D_{3,3}f(x,y,z) = 0 \quad .
\end{aligned}
$$

La matrice hessiana di f calcolata nel punto $P = (0,0,1)$ ha autovalori -2, $\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$, di segno discorde. Il punto è dunque di sella.
Per la funzione

$$f(x,y,z) = x^2y + \sin(z^2) + xy - x \quad .$$

si ha, invece

$$D_1f(x,y,z) = 2xy + y - 1 \quad , \quad D_2f(x,y,z) = x^2 + x \quad , \quad D_3f(x,y,z) = 2z\cos(z^2)$$

che si annullano contemporaneamente nel punto $P = (0,1,0)$, mentre

$$
\begin{aligned}
D_{1,1}f(x,y,z) = 2y \quad , \quad D_{1,2}f(x,y,z) &= D_{2,1}f(x,y,z) = 2x+1 \\
D_{1,3}f(x,y,z) &= D_{3,1}f(x,y,z) = 0 \quad , \quad D_{2,2}f(x,y,z) = 0 \\
D_{2,3}f(x,y,z) &= D_{3,2}f(x,y,z) = 0 \quad , \quad D_{3,3}f(x,y,z) = 2\cos(z^2) - 4z^2\sin(z^2) \quad .
\end{aligned}
$$

La matrice hessiana calcolata in P ha autovalori 2, $\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$. Anche in questo caso il punto è di sella.

4. Data la curva $\gamma : [-1,\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = \big(12t^3 - t\ ,\ \sin(2\pi t) - \pi t\big)$$

dire per quali valori di t γ è regolare.

La curva è di classe C^1 . Le derivate delle sue componenti sono

$$x'(t) = 36t^2 - 1 \quad , \quad y'(t) = 2\pi\cos(2\pi t) - \pi$$

che si annullano entrambe quando $t = \pm 1/6\ \in\ ]-1,\ 1[$. Pertanto la curva è regolare se e solo se $t \neq \pm 1/6$.

Nel caso della curva

$$\gamma(t) = \big(3t^3 - t\ ,\ \sin(\pi t) - \pi t/2\big)$$

le derivate sono

$$x'(t) = 9t^2 - 1 \quad , \quad y'(t) = \pi\cos(\pi t) - \pi/2$$

e si annullano contemporaneamente per $t = \pm 1/3$.

5. Calcolare

$$\iint_R \cos(x-y)\ dx\, dy$$

dove $\quad R = [0,\ \pi/2] \times [0,\ \pi/6] \quad .$

Si ha

$$\iint_R \cos(x-y)\ dx\, dy \ = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\pi/6} \cos(x-y)\ dy\ ;$$

$$\int_0^{\pi/6} \cos(x-y)\ dy \ = \ \sin x - \sin\big(x - \pi/6\big)$$

da cui

$$\int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\pi/6} \cos(x-y)\ dy \ = \int_0^{\pi/2} \big(\sin x - \sin(x-\pi/6)\big)\ dx \ =$$

$$= \ \cos\big(\pi/3\big) - \cos\big(\pi/6\big) + 1 \ = \ \frac{3-\sqrt{3}}{2}\ .$$

Analogamente

$$\int_0^{\pi/3} \sin(x+y)\ dy \ = \ \cos x - \cos\big(x + \pi/3\big)$$

da cui, se $\quad R = [0,\ \pi/2] \times [0,\ \pi/3] \quad ,$

$$\iint_R \sin(x+y)\ dx\, dy \ = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\pi/3} \sin(x+y)\ dy \ = \int_0^{\pi/2} \big(\cos x +$$

$$- \cos(x+\pi/3)\big)\ dx \ = \ 1 - \sin\big(5\pi/6\big) + \sin\big(\pi/3\big) \ = \ \frac{1+\sqrt{3}}{2}\ .$$

6. Dire per quali valori reali α il campo vettoriale $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definito da

$$\mathbf{F}(x,y) = \big(x^3\cos(xy) + \alpha y x^4 \sin(xy)\ ,\ \alpha x^5 \sin(xy)\big)$$

è conservativo.

Poiché $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso, $\mathbf{F}$ è conservativo se e solo se è irrotazionale, cioé, se e solo se

$$D_1\big(\alpha x^5 \sin(x+y)\big) \ = \ 5\alpha x^4 \sin(xy) + \ \alpha y x^5 \cos(xy) \ = \ D_2\big(x^3\cos(xy) + \\ + \alpha y x^4 \sin(xy)\big) \ = \ -x^4\sin(xy) + \alpha x^4 \sin(xy) + \alpha y x^5 \cos(xy)$$

ovvero, se e solo se $\alpha = -1/4$.
Il campo $\mathbf{F}(x,y) = \big(\alpha x^3 \sin(xy) + y x^4 \cos(xy)\ ,\ x^5\cos(xy)\big)$, definito anch'esso in $\mathbb{R}^2$ è conservativo se e solo se

$$D_1\big(x^5\cos(x+y)\big) \ = \ 5x^4\cos(xy) - yyx^5\sin(xy) \ = \ D_2\big(\alpha x^3 \sin(xy) + \\ + yx^4\cos(xy)\big) \ = \ \alpha x^4 \cos(xy) + x^4\cos(xy) - yx^5 \sin(xy)$$

cioé, se e solo se $\alpha = 4$.