Risoluzione es. 3. del 18/07/2013

(a) Dato $F(x,y,z) = (zy^2 - 2y,\ 2xyz - 2x + 1,\ xy^2 + 1)$

si verifica che F è definito su tutto $\mathbb{R}^3$ e che ha

rot $F = (0,0,0)$. Poiché $\mathbb{R}^3$ è semplicemente connesso

questo assicura che F è conservativo.

Un potenziale $V(x,y,z)$ di F può essere calcolato

in vari modi:

$$V(x,y,z) = \int_\gamma F \qquad \text{dove } \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$$

è una curva che connette un qualsiasi punto di $\mathbb{R}^3$

ad esempio l'origine $(0,0,0)$ con il punto assegnato

(x,y,z). Un esempio di curva è $\gamma(t) = (tx, ty, tz)$

Il risultato fornisce $V(x,y,z) = xy^2z - 2xy + y + z$

Si poteva ottenere lo stesso risultato integrando il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = zy^2 - 2y \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = 2xyz - 2x + 1 \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} = xy^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \quad V(x,y,z) = zy^2x - 2yx + g(y,z)$$

dalla 1° eq.

imponendo che $\frac{\partial V}{\partial y} = 2xyz - 2x + 1$ si ottiene che (2)

$g(y,z) = y + h(z)$ da cui $V(x,y,z) = xy^2z - 2xy + y + h(z)$

imponendo $\frac{\partial V}{\partial z} = xy^2 + 1$ si ottiene $h(z) = z$.

Ovviamente il potenziale V è definito a meno di costanti.

Nella 2ª versione del compito si svolgevano gli stessi conti per $\tilde{F}(x,y,z) = (zy^2 - 2y,\ 2xyz - 2x + 2,\ xy^2 + 1)$

e si trovava $\tilde{V}(x,y,z) = xy^2z - 2xy + 2y + z$

(b) Per calcolare il lavoro di F lungo la curva γ

$\gamma(t) = (t, t^2, e^{t^2-1})$ $t \in [-1, 1]$

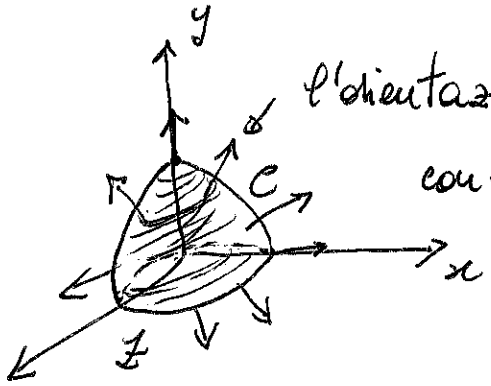
si può calcolare $\gamma'(t) = (1, 2t, 2t\, e^{t^2-1})$ e

svolgere $\int_\gamma F = \int_{-1}^{1} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt$

oppure usare la teoria che dice che il lavoro di F lungo γ è la differenza dei valori di un suo potenziale negli estremi della curva:

$$\int_\gamma F = V(\gamma(1)) - V(\gamma(-1)) = -2$$

(c) la superficie C è la parte superiore della sfera di centro l'origine e raggio 1 una volta scelti gli assi con y verso l'alto:



l'orientazione di C coerente con la normale assegnata

$$n(\underset{x}{0}, \underset{y}{1}, \underset{z}{0}) = (\underset{x}{0}, \underset{y}{1}, \underset{z}{0})$$

Per calcolare il flusso di F attraverso C ci sono 2 modi:

1. scelgo una parametrizzazione e calcolo la normale coerente: ad esempio $\Phi : \{(u,v) : u^2+v^2 \leq 1\} \to \mathbb{R}^3$ definita da $\Phi(u,v) = (\underset{x}{u}, \underset{y}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \underset{z}{v})$

$$n(\Phi(u,v)) = (u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v)$$

(calcolata come $- \dfrac{\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|}$ in modo tale che se la calcolo con $u=0$, $v=0$, visto che $\Phi(0,0) = (0,1,0)$ si abbia $n(\Phi(0,0)) = n(0,1,0) = (0,1,0)$)

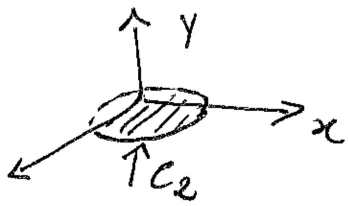
$$\int_{\mathcal{C}} F\cdot n = \iint_{\{u^2+v^2\le 1\}} \langle F\circ\Phi(u,v),\, n(\Phi(u,v))\rangle \, du\, dv$$

$$= \; .....$$

2. il 2° metodo di calcolo è più semplice ed usa il teorema della divergenza sull'insieme

$$D = \{(x,y,z) : \; y \geq 0 \;\; e \;\; x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$$

$$\partial D = \mathcal{C} \cup \{(x,y,z) : \underbrace{y = 0 \;\; e \;\; x^2+z^2 \leq 1}_{C_2}\}$$



$$\iiint_D \operatorname{div} F = \iint_{\mathcal{C}} \langle F, n^{ext}_{\mathcal{C}}\rangle + \iint_{C_2} \langle F, n^{ext}_{C_2}\rangle$$

Poiché $\operatorname{div} F = 2xz$ si verifica facilmente che

$$\iiint_D \operatorname{div} F \, dx\, dy\, dz = 0$$

mentre $\iint_{C_2} \langle F, n^{ext}_{C_2}\rangle$ può essere calcolato utilizzando $\Psi : \{(u,v) : u^2+v^2 \leq 1\} \to \mathbb{R}^3$

definita da $\psi(u,v) = (u, 0, v)$

si vede che $n^{ext}_{C_2} = (0,-1,0)$ per cui

$$\iint_{C_2} \langle F, n^{ext}_{C_2} \rangle = \iint_{\{u^2+v^2 \leq 1\}} \langle F \circ \psi(u,v), (0,-1,0) \rangle \, du\, dv =$$

$$= \iint_{\{u^2+v^2 \leq 1\}} (-1 + 2u - 2u \cdot \overset{0}{\overset{\shortparallel}{0}} \cdot v) \, du\, dv = -\pi + 0 + 0 = -\pi$$

$$\Rightarrow \quad \iint_C \langle F, n \rangle = \pi .$$

La risoluzione della seconda versione era identica.