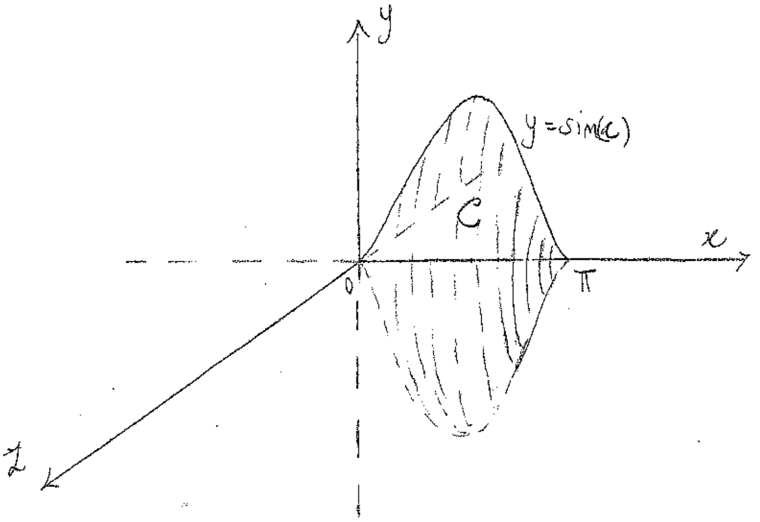
Esercizio 2

Sia V il solido ottenuto dalla rotazione intorno all'asse x del sottoinsieme C del piano x,y dato da

$$C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \sin(x),\ x \in [0,\pi] \}.$$

(a) Si calcoli il volume di V;



Per calcolare l'integrale di V si può utilizzare la formula di integrazione per fette:

$$\text{Volume}(V) = \iiint_V 1 \, dx\,dy\,dz = \int_0^\pi dx \int_{\{(y,z):\,(x,y,z)\in V\} =: V_x} 1 \, dy\,dz$$

notando che $V_x = \{ (y,z) : (x,y,z) \in V \} = \{ (y,z) : y^2 + z^2 \leq (\sin(x))^2 \}$

si ha $\displaystyle\int_{V_x} 1 \, dy\,dz = \pi \, (\sin(x))^2$ e

$$\text{vol}(V) = \iiint_V 1 \, dx\,dy\,dz = \int_0^\pi \pi (\sin(x))^2 dx = \pi \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin x \cos x}{2} \right)\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$$

(b) Si calcoli il seguente integrale sulla superficie S costituita dal bordo di V

$$\int_S \cos(x)\, dS\ ;$$

S è costituita dai punti (x,y,z) tali che $x \in [0,\pi]$ e

$$y^2+z^2 = \sin^2(x).$$

Ne deriva che una parametrizzazione globale di S è data da

$$\varphi : [0,2\pi] \times [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\varphi(\theta,x) = (\underbrace{x}_{X}, \underbrace{\sin(x)\cos(\theta)}_{Y}, \underbrace{\sin(x)\sin(\theta)}_{Z})$$

Per calcolare l'elemento area dS è necessario calcolare

$$dS = \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \times \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right\| d\theta\, dx \quad \text{e risulta}$$

$$\int_S \cos(x)\, dS = \iint_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} \cos(\varphi_1(\theta,x)) \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \times \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right\| d\theta\, dx.$$

Poiché

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = (1,\ \cos(x)\cdot\cos(\theta), \cos(x)\sin(\theta))$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = (0,\ -\sin(x)\sin(\theta), \sin(x)\cos(\theta))$$

si ha

$$\left\| \frac{\partial\varphi}{\partial x} \times \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right\| = \sqrt{\sin^2(x) + \cos^2(x)\sin^2(x)} = \sin(x)\sqrt{1+\cos^2(x)}$$

da cui

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} dx \; \cos(x)\cdot\sin(x)\sqrt{1+\cos^2(x)} =$$

$$= 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{3} \left(1+\cos^2(x)\right)^{3/2} \Big|_0^{\pi} \right) = 0$$

(c) Si calcoli il flusso uscente da S del campo

$$F(x,y,z) = (2xy, -y^2, x+z).$$

Utilizzando il teorema della divergenza si ha che il flusso uscente dalla superficie S è uguale all'integrale su V della $\operatorname{div} F$:

$$\int_S \langle F, \eta_{ext} \rangle \, dS = \int_V \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz .$$

Poiche' $\operatorname{div} F(x,y,z) = 2y - 2y + 1 = 1$ si ha

$$\int_S \langle F, \eta_{ext} \rangle \, dS = \int_V 1 \, dx\,dy\,dz =$$

$$= \operatorname{vol}(V) = \frac{\pi^2}{2} .$$