Prova scritta di Analisi Matematica II

27.01.14

1. Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x,y) = (2x+1)(2y-1)e^{y-2x}.$$

a) Si ha
$$\lim_{x\to-\infty} f(x,0) = -\lim_{x\to-\infty}(2x+1)e^{-2x} = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x,1) = \lim_{x\to-\infty}(2x+1)e^{1-2x} = -\infty$$

Dunque f non è limitata superiormente né inferiormente.

b) f è infinitamente derivabile. Si ha
$$\nabla f(x,y) = \left(-4x(2y-1)e^{y-2x}, (2x+1)(2y+1)e^{y-2x}\right) =$$
$$= (0,0) \iff (x,y) = \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \text{ o } (x,y) = \left(0, -\tfrac{1}{2}\right).$$

Inoltre
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (8x-4)(2y-1)e^{y-2x}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -4x(2y+1)e^{y-2x}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (2x+1)(2y+3)e^{y-2x}.$$

Pertanto

$$H(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 4e^{3/2} \\ 4e^{3/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \det H(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = -16e^{3}$$

da cui segue che $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ è un punto di sella, mentre

$$H(0,-\tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 8/\sqrt{e} & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{e} \end{pmatrix}$$

da cui segue che $(0,-\frac{1}{2})$ è un punto di minimo (locale).

c) Dei due punti stazionari trovati in b), solo $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ è interno a T.
Esaminiamo allora f sul suo bordo.
Detto I_1 il segmento di vertici $(-1,0)$, $(0,0)$, la restrizione a I_1 di f è la funzione

$$g(x) = -(2x+1)e^{-2x} \qquad (x \in [-1,0])$$

che ha massimo $g(-1) = e^{2}$ e minimo $g(0) = -1$.
Detto I_2 il segmento di vertici $(0,0)$, $(0,2)$, la restrizione a I_2 di f è la funzione

$$h(y) = (2y-1)e^{y} \qquad (y \in [0,2])$$

che ha massimo $h(2) = 3e^2$ e minimo $h(0) = -1$.

Detto infine I_3 il segmento di vertici $(-1,0)$, $(0,2)$, la restrizione a I_3 di f è la funzione

$$k(x) = f(x, 2x+2) = (8x^2+10x+3)\, e^2 \quad (x \in [-1,0])$$

che ha massimo $k(0) = 3e^2$ e minimo $k(-5/8) = -e^2/8 > -1$.

Dunque $\max\limits_T f = 3e^2$, $\min\limits_T f = -1$

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x,y) = (x\cos^2 y + y,\ x\sin^2 y - y).$$

a) f è di classe C^1 e si ha

$$\frac{\partial}{\partial x}(x\cos^2 y + y) = \cos^2 y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x\sin^2 y - y) = \sin^2 y$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x\cos^2 y + y) = 1 - x\sin(2y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x\sin^2 y - y) = x\sin(2y) - 1.$$

Pertanto

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} \cos^2 y & 1 - x\sin(2y) \\ \sin^2 y & x\sin(2y) - 1 \end{pmatrix}$$

da cui

$$Jf(1,\pi/4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

b) Si ha

$$\det Jf(x,y) = x\sin(2y) - 1 .$$

D'altra parte

$$|x| \leq \pi/4 \Rightarrow |x\sin(2y)| \leq |x| \leq \pi/4 < 1$$

da cui

$$|1 - x\sin(2y)| \geqslant 1 - |x\sin(2y)| \geqslant 1 - \pi/4 > 0$$

e la locale invertibilità è dunque garantita nella striscia $|x| \leq \pi/4$.

3. Sia $\mathbb{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale

$$\mathbb{F}(x,y,z) = \left(\frac{x^2 y}{2} e^{-z^2}, \; xye^{-z^2}\left(xz - \frac{y}{2}\right), \; \frac{x^2}{2} e^{-z^2} + z \right).$$

a) $\mathbb{F}$ è di classe C^1 e si ha

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2y}{2}e^{-z^2}\right) = xye^{-z^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(xye^{-z^2}\left(xz-\frac{y}{2}\right)\right) = xe^{-z^2}\left(xz-\frac{y}{2}\right) - \frac{xy}{2}e^{-z^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^2}{2}e^{-z^2}+z\right) = 1 - x^2ze^{-z^2}$$

da cui segue

$$\operatorname{div} \mathbb{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2y}{2}e^{-z^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(xye^{-z^2}\left(xz-\frac{y}{2}\right)\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^2}{2}e^{-z^2}+z\right) = 1.$$

b) Applicando il teorema della divergenza al campo $\mathbb{F}$ nel dominio normale D si ottiene

$$\int_{\partial D} (\mathbb{F}, n)\, dS = \iiint_D \operatorname{div} \mathbb{F}\, dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_D dx\,dy\,dz = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} dz \iint_{D_z} dx\,dy$$

dove $D_z = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1-z^2\}$,

da cui

$$\iint_{D_z} dx\,dy = \pi(1-z^2)$$

e dunque

$$\iiint_{D} dx\,dy\,dz = \pi \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} (1-z^2)\,dz =$$

$$= \pi \left[z - \frac{z^3}{3} \right]_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} = \frac{5\pi}{3\sqrt{2}}$$