# Prova scritta di Analisi Matematica II°

18.07.13

① E ellisse di equazione

$$x^2/9 + y^2/16 = 1$$

R rettangolo inscritto in E con i lati paralleli agli assi; (<u>oss.</u>: si può dimostrare che questo è l'unico modo di inscrivere un rettangolo in un ellisse).

(a) Sia P il vertice del rettangolo che si trova nel primo quadrante. Dunque

$$\begin{cases} P=(x,y) & x,y>0 \\ \frac{x^2}{9}+y^2/16 = 1 \end{cases}$$

(se fosse $x=0$ o $y=0$, R si ridurrebbe ad un segmento). Si ha

$$a(R) = 2x \cdot 2y = 4xy$$

ed il problema consiste pertanto nel trovare il massimo della funzione $f(x,y) = 4xy$ soggetto al vincolo

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1 \qquad (xy>0)$$

Con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, sia

$$L(x,y,\lambda)= 4xy-\lambda\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-1\right)$$

ed imponendo che $\nabla L = 0$

$$(*)\qquad \begin{cases} 4y-\frac{2\lambda}{9}x=0 \\ 4x-\frac{\lambda y}{8}=0 \\ x^2/9+y^2/16=1 \end{cases}.$$

Poiché è $\lambda \neq 0$ (altrimenti si avrebbe $x=y=0$), si ha dalla prima delle (*)

$$\lambda = 18\,y/x \qquad (>0)$$

da cui, per la seconda,

$$16x^2=9y^2$$

e dunque, per la terza,

$$y^2 = 8$$

ovvero $y=2\sqrt{2}$ e $x=3/\sqrt{2}$, le coordinate dell'unico punto stazionario vincolato $A=(3/\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$. Questo non può che essere di massimo poiché l'insieme $E \cap \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ è compatto ed i suoi estremi $(0,4), (3,0)$ sono di minimo (area di $R = 0$) per $f$.

Cioè

$$\max_R a(R) = 24$$

(b) Questa volta, se $P$ è come in (a), la funzione da massimizzare è

$$g(x,y) = 4(x+y)$$

rimanendo immutato il vincolo.

Dunque

$$L(x,y,\lambda) = 4(x+y) - \lambda\left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1\right)$$

da cui

$$(**) \quad \begin{cases} 4 - \frac{2\lambda}{9} x = 0 \\ 4 - \frac{\lambda}{8} y = 0 \\ x^2/9 + y^2/16 = 1. \end{cases}$$

Poiché $\lambda \neq 0$, si ha dalle prime due delle (**)

$$16x = 9y$$

e dunque, per la terza

$$25y^2 = 256$$

ovvero $y = 16/5$ e $x = 9/5$ che, per

lo stesso motivo del punto (a) rappresentano le coordinate del punto di massimo per $g(x,y)$. Cioè

$$\max_R p(R) = 20$$

—— . —— . ——

Nella seconda versione, l'esercizio (1) presenta l'ellisse $E$ di equazione

$$x^2/64 + y^2/36 = 1$$

(a) La Lagrangiana è in questo caso

$$L(x,y,\lambda) = 4xy - \lambda\left(x^2/64 + y^2/36 - 1\right)$$

e l'identico procedimento porta al punto di massimo (assoluto)

$$A = (4\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$$

ed al corrispondente massimo

$$\max_R a(R) = 96$$

(b) La Lagrangiana è

$$L(x,y,\lambda) = 4(x+y) - \lambda\left(x^2/64 + y^2/36 - 1\right)$$

il punto di massimo è $B = (32/5, 18/5)$ ed il massimo $\max_R p(R) = 40$.

(2)

(a) Usiamo il cambiamento di variabili ( $x, y > 0$ )

$$u = z/x \quad , \quad v = xz$$

ovvero

$$x = \sqrt{uv} \quad , \quad z = \sqrt{v/u} \; .$$

Quest'ultimo trasforma il quadrato $Q = [1,2] \times [1,2]$, del piano $(u,v)$, nel dominio $D$ del piano $(x, z)$. Posto cioè

$$\phi(u,v) = (\sqrt{uv}, \sqrt{v/u})$$

si ha che $\phi$ è di classe $C^1$ in $Q$ e

$$\det J\phi(u,v) = \det \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \\ -\frac{\sqrt{v}}{2u\sqrt{u}} & \frac{1}{2\sqrt{uv}} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4u} + \frac{1}{4u} = \frac{1}{2u} > 0 \, .$$

Ne segue

$$\iint_D \frac{dx\,dz}{x} = \frac{1}{2} \iint_Q \frac{du\,dv}{u\sqrt{uv}} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{du}{u^{3/2}} \int_1^2 \frac{dv}{\sqrt{v}} = -2 \left[\frac{1}{\sqrt{u}}\right]_1^2 \left[\sqrt{v}\right]_1^2 = 6 - 4\sqrt{2}$$

(b) Utilizzando le coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

l'insieme A si descrive

$$A = \left\{ (\rho, \vartheta, z) \mid \vartheta \in [0, 2\pi], (\rho, z) \in D \right\}$$

dove D è il dominio del punto (a) visto nel piano $(\rho, z)$ invece che $(x, z)$. Pertanto, usando il punto (a)

$$\iiint_A \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} d\theta \iint_D \frac{\rho\, d\rho\, dz}{\rho^2} =$$

$$= 2\pi \iint_D \frac{d\rho\, dz}{\rho} = 4\pi(3 - 2\sqrt{2})$$

——— . ——— . ———

Nella seconda versione, punto (a) il cambiamento di variabile è lo stesso ma, al posto di Q, c'è il rettangolo $R = [1/3, 1] \times [1, 2]$.

Pertanto

$$\iint_D \frac{dx\,dz}{x} = \frac{1}{2}\int_{1/3}^{1} \frac{du}{u^{3/2}} \int_1^2 \frac{dv}{\sqrt{v}} =$$

$$= -2\left[\frac{1}{\sqrt{u}}\right]_{1/3}^{1} \cdot \left[\sqrt{v}\right]_1^2 = 2(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}-1).$$

(b) Procedendo esattamente come nella prima versione, si ottiene

$$\iiint_A \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2} = 2\pi \iint_D \frac{d\rho\,dz}{\rho} = 4\pi(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}-1).$$