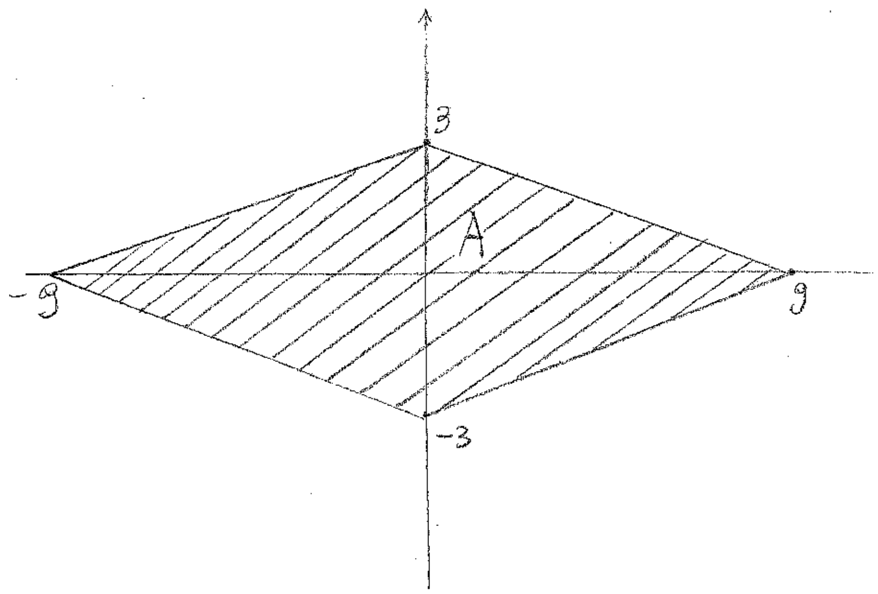
Esercizio 1

Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |3y| \le 9\}, \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x-9)^2}{9} + y^2 \le 8\}.$$

a) Tracciare approssimativamente un disegno di A e B nel piano e stabilire se si tratta di sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^2$;

L'insieme A può essere tracciato esprimendo su ogni quadrante la disuguaglianza che lo identifica:
ad esempio nel quadrante $x \ge 0$, $y \ge 0$ si tratta dei punti (x,y) che stanno sotto la retta $x + 3y = 9$, ossia $0 \le y \le 3 - \frac{x}{3}$, etcetera



si poteva anche utilizzare il fatto che l'insieme è simmetrico rispetto all'asse delle x e delle y ed una volta disegnato nel I quad. fare le simmetrie. Infatti

$$(x,y) \in A \Rightarrow (-x,y),\ (x,-y) \in A$$

L'insieme è chiaramente limitato ($|x|, |y| \le 9 \ \forall (x,y) \in A$)

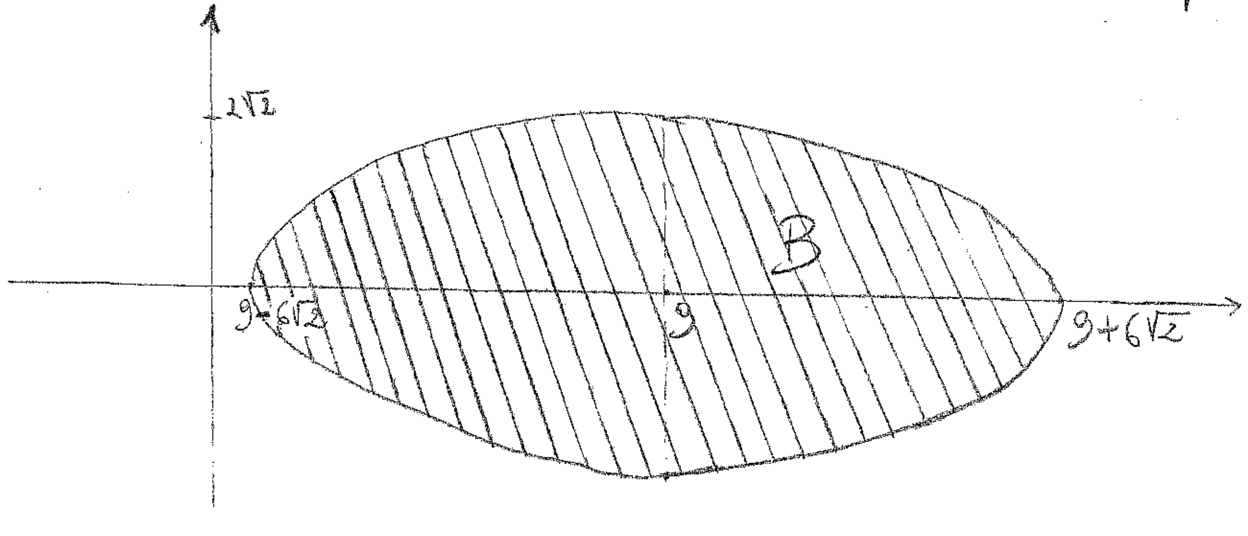
ed anche chiuso (è descritto dalla disequazione $\{f(x,y) \leq 0\}$ rispetto alla funzione continua $f(x,y) = |X| + |3Y| - 9$).

Se ne deduce che A è compatto.

L'insieme B è costituito invece dai punti interni e di frontiera della regione delimitata dall'ellisse di centro $(9,0)$ e semiassi $6\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$ rispettivamente.

Infatti posto $X = x - 9$, $Y = y$ si ha $\dfrac{(X)^2}{9 \cdot 8 = (6\sqrt{2})^2} + \dfrac{(Y)^2}{8 = (2\sqrt{2})^2} \leq 1$.

Per motivi analoghi al caso precedente B è un insieme compatto.



Oss. $9 - 6\sqrt{2} > 0$ infatti $9 - 6\sqrt{2} > 0 \iff 9 > 6\sqrt{2} \iff$

$9^2 > (6\sqrt{2})^2 \iff 81 > 72$

(b) Parametrizzare il bordo di $A \cap B$ come unione di curve regolari;

Calcoliamo i punti di intersezione di ∂A con ∂B:

$$\begin{cases} |X| + |3Y| = 9 \\ (X-9)^2 + 9Y^2 = 8 \cdot 9 = 72 \end{cases}$$

E' chiaro dal disegno che tutti i punti di B hanno ascissa $x > 0$ per cui ci si può ridurre a

$$\begin{cases} x + |3Y| = 9 \\ (x-9)^2 + 9Y^2 = 72 \end{cases} \qquad |3Y| = 9 - x \iff |3Y|^2 = (9-x)^2$$

$\Rightarrow$ sostituisco nella seconda equazione $9Y^2 = (9-x^2)$

$\leadsto$ $(x-9)^2 + (9-x)^2 = 72 \iff 2(x-9)^2 = 72$

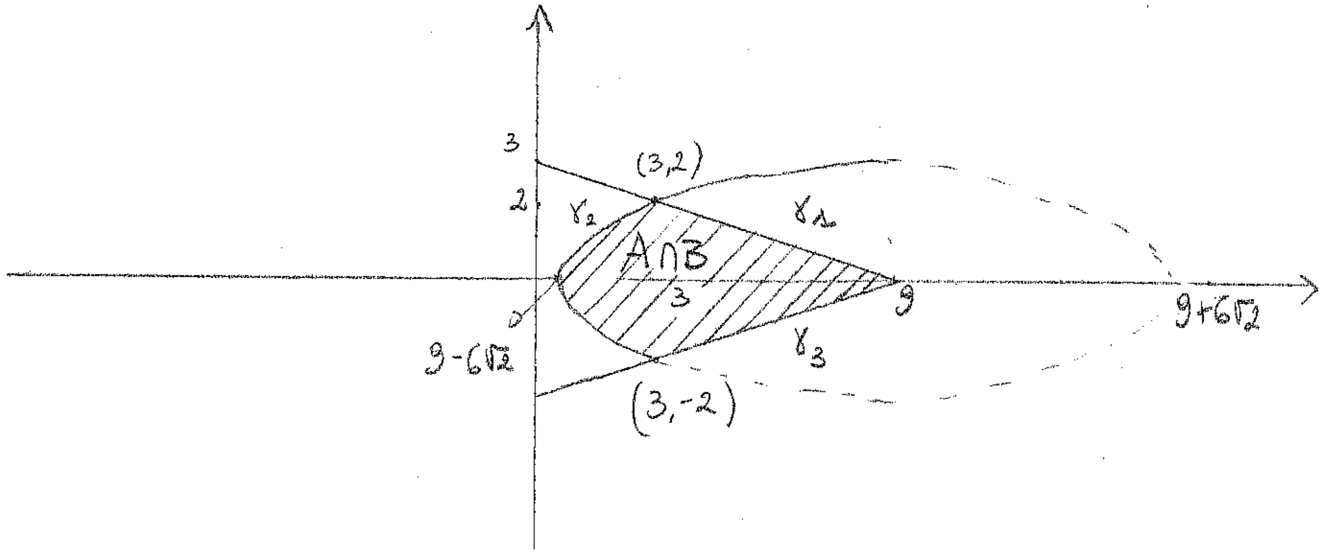
$$\iff (x-9)^2 = 36 \iff |X-9| = 6 \iff \begin{matrix} X = 3 \\ X = 15 \end{matrix}$$

Poiché i punti dell'ellisse verificano $9 - 6\sqrt{2} \leq x \leq 9 + 6\sqrt{2}$

allora l'unica soluzione accettabile è $x = 3$

Dall'equazione $|3Y| = 9 - x$ si ricava $|3Y| = 9 - 3 = 6$

$\Rightarrow$ $|Y| = 2$ $\Rightarrow$ $Y = 2$ e $Y = -2$



il bordo di $A \cap B$ è costituito da 2 segmenti ed un arco di ellisse:

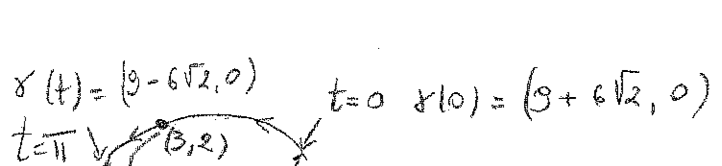
$$\gamma_1(t) = \left(t,\ 3 - \frac{t}{3}\right) \qquad t \in [3,9]$$

$$\gamma_3(t) = \left(t,\ \frac{t}{3} - 3\right) \qquad t \in [3,9]$$

Per parametrizzare l'arco di ellisse basta utilizzare la curva

$$\Big(\underbrace{6\sqrt{2}}_{\text{semiasse } x}\cos(t) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{traslazione in } (9,0) \\ \text{del centro}}}{9},\ \underbrace{2\sqrt{2}}_{\text{semiasse } y}\sin(t)\Big)$$

È necessario capire dove varia t in modo da parametrizz. solo l'arco di ellisse che interessa.



si nota che imponendo $(3,2) = (6\sqrt{2}\cos(\bar{t}) + 9,\ 2\sqrt{2}\sin(\bar{t}))$

Si ottiene la soluzione $\bar{t} \in [0, \pi]$ esattamente $\bar{t} = \frac{3}{4}\pi$;

imponendo $(3,-2) = (6\sqrt{2}\cos(\bar{\bar{t}}) + 9, 2\sqrt{2}\sin(\bar{\bar{t}}))$

si ottiene come soluzione in $[\pi, 2\pi]$ $\bar{\bar{t}} = \frac{5}{4}\pi$.

Allora

$$\gamma_2(t) = \left(6\sqrt{2}\cos(t) + 9,\ 2\sqrt{2}\sin(t)\right) \quad t \in \left[\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right]$$

E' facile verificare che $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sono curve regolari.

(c) Calcolare l'area di $A \cap B$;

Si possono utilizzare diversi metodi di calcolo:

ad esempio si può vedere l'insieme come dominio

$$A \cap B = \left\{(x,y) : y \in [-2, 2],\ 9 - 3\sqrt{8-y^2} \le x \le 9 - |3y|\right\}$$

da cui

$$\text{area}(A \cap B) = \iint_{A \cap B} 1 \, dx\,dy = \int_{-2}^{2} dy \int_{9-3\sqrt{8-y^2}}^{9-|3y|} 1 \, dx =$$

y-simmetrico

$$= 2\int_0^2 dy \int_{9-3\sqrt{8-y^2}}^{9-3y} dx = 2\int_0^2 \left(9 - 3y - 9 + 3\sqrt{8-y^2}\right) dy =$$

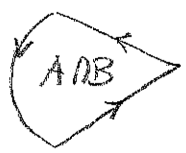
$$= 6\int_0^2 \left(\sqrt{8-y^2} - y\right) dy = \ldots = 24 + 6\pi$$

Una seconda possibilità è utilizzare il teorema di Gauss-Green e scrivere

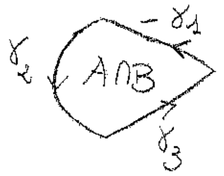
$$\iint_{A \cap B} 1 \, dx\,dy \overset{G.-G.}{=} \int_{\partial(A\cap B)^+} x \, dy$$

$$= -\int_{\partial(A\cap B)^+} y \, dx = \int_{\partial(A\cap B)^+} \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$$

L'orientazione positiva di $\partial(A\cap B)$ è la seguente:



rispetto alle parametrizzazioni trovate al punto (b) si ha



da cui $$\int_{\partial(A\cap B)^+} x\,dy = -\int_{\gamma_1} x\,dy + \int_{\gamma_2} x\,dy + \int_{\gamma_3} x\,dy =$$

$$= -\int_3^9 t\left(-\frac{1}{3}\right)dt + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (9 + 6\sqrt{2}\cos(t)) \cdot 2\sqrt{2}\cos(t)\,dt +$$

$$+ \int_3^9 t \cdot \frac{1}{3}\,dt = \left.\frac{t^2}{6}\right|_3^9 + \left. 18\sqrt{2}\sin(t)\right|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} +$$

$$+ 24 \left.\frac{t + \cos(t)\sin(t)}{2}\right|_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} + \left.\frac{t^2}{6}\right|_3^9 = \ldots\ldots = 24 + 6\pi$$

(d) Data $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2$ calcolare massimo e minimo assoluti di f ristretta ad $A \cap B$.

Poiché f è continua ed $A \cap B$ è un compatto, per il teo di Weierstrasse, esistono massimi e min assoluti di $f_{|A \cap B}$.

Ricerca dei punti di max e min sulla parte interna di $A \cap B$: uno devono risolvere $\nabla f(x,y) = 0 \quad (x,y) \in \mathring{\widehat{A \cap B}}$

$$\nabla f(x,y) = (2x-2, 2y) \Rightarrow \nabla f(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

il punto $(1,0) \in A \cap B$ infatti

$$1 > 9 - 6\sqrt{2} \Longleftrightarrow 8 < 6\sqrt{2} \Longleftrightarrow 4 < 3\sqrt{2} \Longleftrightarrow 16 < 18$$

Ricerca dei punti "stazionari" su $\partial(A \cap B)$:

<u>caso 1.</u> $f_{|\text{retta } y = x - \frac{x}{3}}$ per $x \in [3,9]$

ossia f ristretta alla curva γ_1

$$f(x,y)_{|\text{parte di retta}} = f\left(x, 3 - \frac{x}{3}\right) \quad \text{per } x \in [3,9]$$

$$f\left(x, 3 - \frac{x}{3}\right) = x^2 - 2x + \left(\frac{9-x}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}\left[9x^2 - 18x + 81 + x^2 - 18x\right]$$

$$= \frac{1}{9}\left[10x^2 - 36x + 81\right] =: g(x) \quad \text{per } x \in [3,9]$$

$g'(x) = \frac{1}{9}\left[20x - 36\right]$, $g'(x) = 0 \iff x = \frac{9}{5} \notin [3,9]$

$\Rightarrow g' > 0$ su $[3,9] \Rightarrow \max\limits_{\gamma_1} f = g(9) = 63$, $\min\limits_{\gamma_1} f = g(3) = 7$

<u>caso 2.</u> $f|$ retta $y = \frac{x}{3} - 3$ $x \in [3,9]$, ossia $f|_{\gamma_3}$

poiché $f(x,y) = f(x,-y)$ $\max\limits_{\gamma_3} f = \max\limits_{\gamma_1} f = 63$ e

$\min\limits_{\gamma_3} f = \min\limits_{\gamma_1} f = 7$

<u>caso 3.</u> $f|$ porzione di ellisse $(x-9)^2 + 9y^2 = 72$ $x \in [9-6\sqrt{2}, 3]$

uso i moltiplicatori di Lagrange e ricerco i punti (x,y,λ) stazionari per $f(x,y) - \lambda\left[(x-9)^2 + 9y^2\right]$ che soddisfino $(x-9)^2 + 9y^2 = 72$ ed $x \in [9-6\sqrt{2}, 3]$

Posta $h(x,y) = (x-9)^2 + 9y^2$ impongo

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla h(x,y) \\ h(x,y) = 72 \\ x \in [9-6\sqrt{2}, 3], \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x - 2 = 2\lambda(x-9) \\ 2y = 18\lambda y \end{cases} , \quad \begin{array}{l} (x-9)^2 + 9y^2 = 72 \\ x \in [9-6\sqrt{2}, 3] \end{array}$$

$\Rightarrow \quad y = 0 \quad$ oppure $\lambda = \frac{1}{9}$

se $y = 0$ allora $x = 9 - 6\sqrt{2}$ e λ deve verificare $x - 1 = \lambda(x-9)$

$\Rightarrow \lambda 6\sqrt{2} = 8 - 6\sqrt{2} \Rightarrow \lambda = \frac{4}{3\sqrt{2}} - 1$ (anche se il valore di λ non influenza)

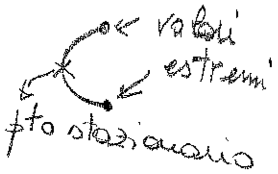
se invece $y \neq 0$ allora deve essere $\lambda = \frac{1}{9}$

dalla 1° eq. ne deduciamo $x - 1 = \lambda(x-9) = \frac{1}{9}(x-9)$

$\Rightarrow \frac{8}{9} x = 0 \Rightarrow x = 0$ che non è accettabile

Per avere max $f_{|\gamma_2}$ e min $f_{|\gamma_2}$ i punti candidati

sono allora $(9-6\sqrt{2}, 0)$, $(3, 2)$, $(3, -2)$



Riassumendo il max e min di $f_{|A \cap B}$

sono il più grande ed il più piccolo dei valori

$$f(1,0) = -1$$

$$f(3,2) = f(3,-2) = 63 \quad (= g(9) \text{ del caso 1.})$$

$$f(9-6\sqrt{2}, 0) = (9-6\sqrt{2})^2 - 2(9-6\sqrt{2}) =$$

$$= (9-6\sqrt{2})(7-6\sqrt{2}) = 63 + 72 - 6 \cdot 16\sqrt{2}$$

Si verifica che $63 > 63 + 72 - 6 \cdot 16\sqrt{2}$ $\left(\Longleftrightarrow 72 < 6 \cdot 16\sqrt{2} \Longleftrightarrow 9 < 8 \cdot \sqrt{2} \right)$

e che $63 + 72 - 6 \cdot 16\sqrt{2} > -1$

$\Longrightarrow \quad \max_{A \cap B} f = 63 \quad$ e $\min_{A \cap B} f = -1$

Il calcolo precedente poteva essere modificato nello studio di max e min di $f_{|\gamma_1}$, $f_{|\gamma_3}$, $f_{|\gamma_2}$ in vari modi:

ad esempio per studiare $f_{|\gamma_2}$ si poteva sostituire

in $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 \qquad y^2 = 9 - \dfrac{(x-9)^2}{9}$

$\Longrightarrow$ studiare poi $W(x) = x^2 - 2x + 9 - \dfrac{(x-9)^2}{9} \quad x \in [9-6\sqrt{2}, 3]$

per studiare $f_{|\gamma_1}$ si potevano utilizzare i moltiplicatori di Lagrange:

posto $\varphi(x,y) = y - 3 + \dfrac{x}{3}$ risolvo

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla \varphi(x,y) \\ \varphi(x,y) = 0 \\ x \in [3, 9] \end{cases}$$