Corso di Algebra Lineare e Analisi Matematica II

Anno Accademico 2012-2013

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA II

Pisa, 27.01.14

Nome e cognome **Matricola**

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) \;=\; (2x+1)(2y-1)\; e^{y-2x} \quad .$$

   (a) Mostrare che f **non** è limitata superiormente **né** inferiormente.
   (b) Trovare i punti stazionari di f e determinarne la natura.
   (c) Detto T il sottinsieme del piano la cui frontiera è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,2)$, $(-1,0)$, calcolare

$$\max_T f \qquad , \qquad \min_T f \quad .$$

2. $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione vettoriale definita da

$$\mathbf{f}(x,y) \;=\; \big(x\cos^2 y + y \;,\; x\sin^2 y - y\big) \quad .$$

   (a) Scrivere la matrice jacobiana $J\mathbf{f}(1,\, \pi/4)$.
   (b) Provare che $\mathbf{f}$ è localmente invertibile nella striscia $|x| \leq \pi/4$.

3. Sia $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale definita da

$$\mathbf{F}(x,y,z) \;=\; \Big(\frac{x^2 y}{2}\, e^{-z^2} \;,\; xy\, e^{-z^2}\big(xz - \frac{y}{2}\big) \;,\; \frac{x^2}{2}\, e^{-z^2} + z\Big) \quad .$$

   (a) Calcolare la divergenza di $\mathbf{F}$.
   (b) Posto $D \;=\; \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\; x^2+y^2+z^2 \leq 1 \;,\; z^2 \leq 1/2\big\}$, calcolare il flusso

$$\int_{\partial D} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle \; dS$$

   dove $\mathbf{n}$ indica il versole normale esterno a ∂D .