Esercizio 2

- calcolare lo sviluppo in serie di Fourier reale di $f(x) = \pi - |x|$ su $[-\pi, \pi]$ estesa periodicamente su $\mathbb{R}$

cerco $a_K, b_K$ tali che $$f(x) = \sum_{K=0}^{\infty} (a_K \cos Kx + b_K \sin Kx)$$

poiché $f(x) = f(-x)$ allora $b_K = 0 \quad \forall K$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |x|)\, dx = \dots = \frac{\pi}{2}$$

$$a_K = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |x|) \cos Kx \, dx = \frac{2}{\pi K^2} (1 - (-1)^K) = \begin{cases} 0 & \text{se } K = 2j \ (K \text{ pari}) \\ \frac{4}{\pi (2j+1)^2} & \text{se } K = 2j+1 \ (K \text{ dispari}) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Serie di Fourier reale di $f$ $= \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{4 \cos((2j+1)x)}{\pi (2j+1)^2} + \frac{\pi}{2} = S(f)(x)$

Poiché $f$ è periodica, $C^1$ a tratti e continua su $\mathbb{R}$ si ha che

$$f(x) = S(f)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

e $$f_M(x) := \sum_{j=0}^{\left[\frac{M-1}{2}\right]} \frac{4 \cos((2j+1)x)}{\pi (2j+1)^2} + \frac{\pi}{2}$$ converge uniformemente ad $f$ su $\mathbb{R}$ (2)

Dalla (1) otteniamo subito, calcolando in $x = 0$, che

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{4 \cos(0)}{\pi (2j+1)^2} = f(0) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

da cui
$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\right) = \frac{\pi^2}{8} - 1 .$$

- dimostrare che $f_N^2 \longrightarrow f^2$ uniformemente su $\mathbb{R}$

Poiche' $f_N \longrightarrow f$ unif. su $\mathbb{R}$ (vedi (2)) si ha anche che $\exists\, C>0$

tale che $\|f_N\|_\infty \leq C \quad \forall N \in \mathbb{N} \qquad$ e $\|f\|_\infty \leq C$

(segue banalmente da $\|f_N\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \underbrace{\|f_N - f\|_\infty}_{\to 0 \text{ quindi è anche limitata}}$ )

allora
$$\|f_N^2 - f^2\|_\infty \leq \|f_N - f\|_\infty \cdot \|f_N + f\|_\infty \leq 2C\, \|f_N - f\|_\infty$$
$$\left( = \sup_x |f_N^2(x) - f^2(x)| \leq \sup_x |f_N(x) - f(x)| \cdot \sup_x |f_N(x) + f(x)| \right)$$

da cui $\lim\limits_{N\to+\infty} \|f_N^2 - f^2\|_\infty \leq 2C \lim\limits_{N\to+\infty} \|f_N - f\|_\infty = 0$ grazie a (2)

- calcolare i valori delle seguenti serie numeriche:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ ; (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$ .

il valore della serie (a) è già stato calcolato utilizzando la convergenza puntuale della serie di Fourier reale di $f$ in $x=0$.

Per calcolare il secondo valore si utilizza il fatto che $f_N^2 \to f^2$ uniformemente su $\mathbb{R}$, dimostrato al punto precedente.

Esplicitiamo $f_N^2$, ponendo $m = \left[\frac{N-1}{2}\right]$:

$$f_N(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{4\cos((2j+1)x)}{\pi(2j+1)^2} + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad f_N^2(x) = \sum_{i,j=0}^{m} \frac{4^2}{\pi^2} \frac{\cos((2j+1)x)\cdot\cos((2i+1)x)}{(2j+1)^2\cdot(2i+1)^2} + \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2}\cdot 2 \sum_{j=0}^{m} \frac{4\cos((2j+1)x)}{\pi\,(2j+1)^2}$$

Ricordandosi che $\cos kx$ è ortogonale a $\cos hx$ se $k \neq h$, integrando su $[-\pi,\pi]$ si ottiene:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_N^2(x)\,dx \overset{\text{somma finita + linearità dell'integrale}}{=} \sum_{i,j=0}^{m} \frac{4^2}{\pi^2}\frac{1}{(2j+1)^2(2i+1)^2} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos((2j+1)x)\cos((2i+1)x)\,dx}_{=0 \text{ se } i\neq j} + \frac{\pi^2 \cdot 2\pi}{4} + 0$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + \sum_{j=0}^{m} \frac{4^2}{\pi^2}\frac{1}{(2j+1)^4} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2((2j+1)x)\,dx}_{=\pi} = \sum_{j=0}^{m} \frac{4^2}{\pi(2j+1)^4} + \frac{\pi^2}{4}\cdot 2\pi$$

quando $N \to +\infty$ anche $m = \left[\frac{N-1}{2}\right] \longrightarrow +\infty$

per cui $$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{4^2}{\pi(2j+1)^4} = \lim_{N\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_N^2(x)\,dx - \frac{\pi^3}{2}$$

Poiché $f_M^2 \to f^2$ uniformemente su $[-\pi, \pi]$ si può passare al limite sotto il segno di integrale ed ottenere

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \lim_{M \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_M^2(x)\,dx = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4^2}{\pi\,(2j+1)^4} + \frac{\pi^3}{4}$$

(per la 1° uguaglianza basta vedere che

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} (f_M^2(x) - f^2(x))\,dx \right| \le \int_{-\pi}^{\pi} | f_M^2(x) - f^2(x) |\,dx \le 2\pi \, \| f_M - f \|_\infty \ )$$

Si ottiene quindi

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^4} = \frac{\pi}{4^2}\left( \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \frac{\pi^3}{4} - \frac{4^2}{\pi} \right) = \frac{\pi}{8} \int_0^{\pi} (\pi - x)^2\,dx - 1 - \frac{\pi^4}{32}$$

$$= \ldots\ldots = \frac{\pi^4}{96} - 1$$