Università degli Studi di Pisa- Corso di laurea in Matematica
PROVA SCRITTA DI CALCOLO DIFFERENZIALE

del 19 Dicembre 2008

Nome e Cognome:________________________ Matricola:________________

1. Dato il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = y^2 - (\sin(x))^2 \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$
si chiede di
   - determinare l'intervallo di esistenza della soluzione massimale per $\alpha = 0$ e tracciarne un grafico qualitativo;
   - dimostrare che esiste $\bar{\alpha} > 0$ tale che la soluzione massimale non è definita su tutto $\mathbb{R}$;
   - dimostrare che esiste $c > 0$ tale che per ogni $\alpha \in (-c, 0)$ la soluzione massimale è definita su tutto $\mathbb{R}^+$ ed inoltre $|y'| \leq 1$;
   - posto $C := \sup\{c : \text{ vale quanto detto nel punto sopra}\}$ studiare qualitativamente la soluzione relativa ad $\alpha = C$.

   versione iniziale del terzo punto:
   - dimostrare che esiste $c > 0$ tale che per ogni $\alpha \in (-c, c)$ la soluzione massimale è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed inoltre $|y'| \leq 1$;

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodica e coincidente con la funzione $\pi - |x|$ su $[-\pi, \pi]$. Si chiede di
   - calcolare lo sviluppo in serie di Fourier reale di f;
   - posta f_N la somma parziale N-esima dello sviluppo sopra stabilire se f_N^2 converge uniformemente ad f^2 su $\mathbb{R}$;
   - calcolare i valori delle seguenti serie numeriche:
$$(a) \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}; \quad (b) \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$