Università degli Studi di Pisa- Corso di laurea in Matematica
PROVA SCRITTA DI CALCOLO DIFFERENZIALE

del 4 Novembre 2008

Nome e Cognome:________________________ Matricola:________________

1. Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{xy-x^2}{y}} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

studiarne la continuità e la derivabilità parziale su tutto $\mathbb{R}^2$.
Considerato l'insieme $D = \{(x,y) \,:\, x^2 < \sqrt[3]{y^4} < 1\}$ disegnarlo sul piano e stabilire se la funzione f ristretta a tale insieme è uniformemente continua.

2. Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tale che $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ su tutto $\mathbb{R}^2$ e sia $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $G(x,y) = (x + a^2 y, ax - y)$. Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $h = f \circ G$ verifica anch'essa l'equazione $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$ su tutto $\mathbb{R}^2$.

3. Determinare i punti stazionari della funzione $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $g(x,y,z) = xyz e^{-x^2-4y^2-z^2}$ stabilendo se si tratta di massimi o minimi relativi o punti di sella. Determinarne poi estremo superiore ed inferiore.

4. Dire se l'applicazione $T : C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ definita da

$$T(f)(x) = 1 + \int_x^{x^2} e^{-tx} f(t)\, dt$$

ha almeno un punto fisso.