Corso di Geometria e Topologia Differenziale

Appello del 6/9/2017

La durata della prova è di 2 ore e 30 minuti.

Esercizio 1. (10 punti) Sia S la superficie di rotazione ottenuta facendo ruotare intorno all'asse z la curva $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\gamma(s) = (\varphi(s), 0, \psi(s)) \ ,$$

dove $\varphi, \psi\colon I \to \mathbb{R}$ sono funzioni C^∞ e $\varphi(s) > 0$ per ogni $s \in I$. Si supponga inoltre che γ sia parametrizzata per lunghezza d'arco. Sia inoltre $K(u, v)$ la curvatura Gaussiana di S nel punto

$$(\varphi(v)\cos u, \varphi(v)\sin u, \psi(v)) \ .$$

(i) Si mostri che

$$K(u, v) = -\frac{\psi'(v)(\psi'(v)\varphi''(v) - \psi''(v)\varphi'(v))}{\varphi(v)} \ .$$

(ii) Si mostri che

$$K(u, v) = -\frac{\varphi''(v)}{\varphi(v)} \ .$$

Soluzione.
Svolto a lezione.

Esercizio 2. (9 punti) Sia $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata per lunghezza d'arco. Si supponga che i piani osculatori di γ si incontrino tutti in un punto. Si mostri che γ è piana.

Soluzione.
Sia t, n, b il triedro di Frenet di γ, e sia $p \in \mathbb{R}^3$ il punto in comune a tutti i piani osculatori di γ. Poiché il piano osculatore a γ in $\gamma(s)$ passa per $\gamma(s)$ ed ha giacitura generata da $t(s)$ e $n(s)$, esistono funzioni $\alpha, \beta\colon I \to \mathbb{R}$ tali che, per ogni $s \in I$,

$$p = \gamma(s) + \alpha(s)t(s) + \beta(s)n(s) \ . \tag{1}$$

Inoltre, α e β sono lisce. Derivando ed applicando le formule di Frenet si ottiene

$$0 = (1 + \alpha'(s) - \beta(s)\kappa(s))t(s) + (\alpha(s)\kappa(s) + \beta'(s))n(s) - \beta(s)\tau(s)b(s) \ ,$$

dove κ e τ sono la curvatura e la torsione di γ. Poiché t, n, b sono linearmente indipendenti, se ne deduce in particolare che

$$\beta(s)\tau(s) = 0 \tag{2}$$

e

$$\alpha(s)\kappa(s) + \beta'(s) = 0 \tag{3}$$

per ogni $s \in I$. Vogliamo ora dimostrare che $\tau(s) = 0$ per ogni s, condizione che sappiamo essere equivalente alla planarità di γ.

Supponiamo allora per assurdo che $\tau(s_0) \neq 0$ per qualche $s_0 \in I$. Per continuità di τ, esiste un intervallo $J \subseteq I$ tale che $\tau(s) \neq 0$ per ogni $s \in J$. Da (2) deduciamo allora che $\beta(s) = 0$ per ogni $s \in J$, da cui anche $\beta'(s) = 0$ per ogni $s \in J$ e, da (3), $\alpha(s)\kappa(s) = 0$ per ogni $s \in J$. Ma la curvatura di una curva biregolare non si annulla mai, per cui concludiamo che $\alpha(s) = \beta(s) = 0$ per ogni $s \in J$. Dall'uguaglianza (1) deduciamo allora che $\gamma(s) = p$ per ogni $s \in J$, e ciò contraddice la biregolarità (anche la sola regolarità) di γ.

Esercizio 3. (11 punti)
Si considerino l'insieme

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = z^2, z > 0\} ,$$

e, per ogni $R > 0$, l'insieme

$$Z_R = Z_R \cap \{z = R\} .$$

(i) Si mostri che C è una superficie, e se ne determini un versore normale.
(ii) Si dia una parametrizzazione per lunghezza d'arco di Z_R, mostrando che Z_R è il supporto di una curva periodica.
(iii) Si calcoli la curvatura geodetica di Z_R in ogni suo punto.
(iv) Siano $R_2 > R_1 > 0$ numeri reali positivi, e sia $Y = \{(x, y, z) \in C \,|\, R_1 \leq z \leq R_2\}$ la regione di C delimitata da Z_{R_1} e Z_{R_2}. Dando per noto che la curvatura di Gauss di C è identicamente nulla, si verifichi la formula di Gauss-Bonnet per la regione Y.

Soluzione.
(i) L'insieme C è luogo di zeri della funzione $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ data da $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, il cui gradiente $(2x, 2y, -2z)$ si annulla solo in 0, che non appartiene a C. Dunque C è una superficie, e

$$N(x, y, z) = \frac{(2x, 2y, -2z)}{\|(2x, 2y, -2z)\|} = \frac{(x, y, -z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{(x, y, -z)}{\sqrt{2} \cdot z} .$$

(ii): La parametrizzazione cercata è

$$\gamma_R \colon \mathbb{R} \to C , \quad \gamma_R(s) = \left(R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R}, R \right) .$$

(iii): Si ha

$$\gamma_R'(s) = \left(-\sin \frac{s}{R}, \cos \frac{s}{R}, 0 \right) , \quad \gamma_R''(s) = \left(-\frac{1}{R} \cos \frac{s}{R}, -\frac{1}{R} \sin \frac{s}{R}, 0 \right)$$

e

$$N(\gamma_R(s)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{s}{R}, \sin \frac{s}{R}, -1 \right)$$

per cui la curvatura geodetica κ_g lungo γ_R è data da

$$\kappa_g(s) = \langle N(\gamma_R(s)) \wedge \gamma_R'(s), \gamma_R''(s) \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}R} .$$

(iv): Se orientiamo Y coerentemente con la normale N, allora γ_{R_1} risulta coerente con l'orientazione di Z_{R_1} come bordo di Y, mentre γ_{R_2} percorre Z_{R_2} in senso contrario all'orientazione di ∂Y. Inoltre, la lunghezza di Z_{R_1} è $2\pi R_1$, mentre quella di Z_{R_2} è $2\pi R_2$.

Dunque

$$\int_{\partial Y} \kappa_g = 2\pi R_1 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}R_1} \right) - 2\pi R_2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}R_2} \right) = 0 .$$

Inoltre, il bordo di Y è privo di punti angolosi, e la curvatura di Gauss di Y è nulla in ogni punto. Dunque dalla formula di Gauss-Bonnet deduciamo che

$$2\pi\chi(Y) = \int_{\partial Y} \kappa_g + \int_Y K\, dA = 0 + 0 = 0 \ ,$$

il che è coerente con il fatto che Y è diffeomorfo ad un anello, ed ha dunque caratteristica di Eulero nulla.