Corso di Geometria e Topologia Differenziale

Appello del 28/1/2015

La durata della prova è di 2 ore e 30 minuti.

Esercizio 1 (11 punti). Sia S una superficie in $\mathbb{R}^3$, sia $\gamma\colon [0,1] \to S$ una curva con valore iniziale $\gamma(0) = p$ e sia $v_0 \in T_pS$. Si mostri che esiste un unico campo parallelo $V\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ lungo γ tale che $V(0) = v_0$. (Per semplicità, è consentito assumere che il supporto di γ sia contenuto nel dominio di una carta).

Soluzione. L'esercizio è stato svolto a lezione.

Esercizio 2 (9 punti). Sia $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ la sfera di raggio unitario centrata nell'origine, e sia $\gamma\colon I \to S$ una curva parametrizzata per lunghezza d'arco avente curvatura costante κ. Sia t, n, b il triedro di Frenet di γ.

(i) Si mostri che

$$\gamma(s) = -\frac{1}{k}n(s) + \frac{\sqrt{\kappa^2 - 1}}{\kappa}b(s) \qquad \text{per ogni } s \in I \ ,$$

oppure

$$\gamma(s) = -\frac{1}{k}n(s) - \frac{\sqrt{\kappa^2 - 1}}{\kappa}b(s) \qquad \text{per ogni } s \in I \ .$$

(ii) Si dimostri che γ è piana.

Soluzione. Poiché t, n, b è una terna ortonormale e la quantità $\langle \gamma(s), b(s)\rangle$ dipende in maniera continua da s, per dimostrare (i) è sufficiente mostrare che $\langle \gamma(s), t(s)\rangle = 0$, $\langle \gamma(s), n(s)\rangle = -1/\kappa$, $\langle \gamma(s), b(s)\rangle = \pm\sqrt{\kappa^2 - 1}/\kappa$. Notiamo anche che, poiché $\|\gamma(s)\|^2 = 1$, la somma dei quadrati delle coordinate di $\gamma(s)$ rispetto a t, n, b deve essere uguale a 1, per cui l'ultima uguaglianza è conseguenza delle prime due. Derivando l'uguaglianza $\langle \gamma(s), \gamma(s)\rangle = 1$ otteniamo $\langle \gamma(s), t(s)\rangle = 0$ da cui, derivando ancora,

$$0 = \langle t(s), t(s)\rangle + \kappa\langle \gamma(s), n(s)\rangle = 1 + \kappa\langle \gamma(s), n(s)\rangle \ .$$

Ciò conclude la dimostrazione di (i).

(ii): Sia τ la torsione di γ. Per quanto visto in (i), si ha $\gamma(s) = (-1/\kappa)n(s) + \beta b(s)$, dove β è una costante. Derivando e sfruttando le formule di Frenet si ottiene

$$t(s) = t(s) + (\tau(s)/\kappa)b(s) + \beta\tau(s)n(s) \ .$$

Poiché t, n, b sono linearmente indipendenti, se ne deduce $\tau(s) = 0$ per ogni s, per cui γ è piana.

Esercizio 3 (11 punti). Sia $S = S^2$ la sfera unitaria centrata nell'origine, orientata dalla normale esterna $N(p) = p$, e, per ogni $h \in (0,1)$, sia

$$R_h = \{(x, y, z) \in S^2 \,|\, 0 \leq z \leq h\} \ .$$

Si può dare per noto che R_h sia una superficie compatta con bordo contenuta in S^2 il cui bordo è dato dall'equatore e dal parallelo ad altezza h (per cui, in particolare, R_h è una regione di S).

(i) Si mostri che $\chi(R_h) = 0$ (è consentito aiutarsi con un disegno).

(ii) Si esibiscano delle parametrizzazioni per lunghezza d'arco delle due componenti di ∂R_h, orientate coerentemente con l'orientazione indotta da R_h sul suo bordo.

(iii) Si calcoli la curvatura geodetica delle componenti di bordo di R_h.

(iv) Si calcoli l'area di R_h sfruttando il Teorema di Gauss–Bonnet.

Soluzione.

(i): R_h è diffeomorfo ad un anello, di cui non è difficile esibire una triangolazione che mostri che $\chi(R_h) = 0$.

(ii): Come asserito nel testo, le componenti di ∂R_h sono l'equatore ed il parallelo ad altezza h. Ci si rende conto facilmente che, affinché le loro orientazioni siano coerenti con quella di R_h, l'equatore deve essere percorso in senso antiorario, mentre il parallelo ad altezza h in senso orario. Dunque le parametrizzazioni richieste sono date da

$$\alpha\colon [0, 2\pi] \to S^2\,, \quad \alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)\ ,$$
$$\beta\colon [0, 2\pi\sqrt{1-h^2}] \to S^2\,, \quad \beta(t) = \left(\sqrt{1-h^2}\cos\frac{t}{\sqrt{1-h^2}}, -\sqrt{1-h^2}\sin\frac{t}{\sqrt{1-h^2}}, h\right)\ .$$

(iii): La componente parametrizzata da α è l'equatore, che è una geodetica ed ha perciò curvatura geodetica nulla. Per quanto riguarda la componente parametrizzata da β, si ha

$$\beta'(t) = (-\sin(t/\sqrt{1-h^2}), -\cos(t/\sqrt{1-h^2}), 0)\ ,$$
$$\beta''(t) = (-(1/\sqrt{1-h^2})\cos(t/\sqrt{1-h^2}), (1/\sqrt{1-h^2})\sin(t/\sqrt{1-h^2}), 0)\ ,$$

e $N(\beta(t)) = \beta(t)$, per cui

$$\kappa_g(t) = \langle \beta''(t), N(\beta(t)) \wedge \beta'(t)\rangle = -\frac{h}{\sqrt{1-h^2}}\ .$$

(iv): Poiché la curvatura Gaussiana della sfera è uguale a 1, si ha $\mathrm{Area}(R_h) = \int_{R_h} K\, d\mathrm{A}$. Per quanto visto al punto (iii), $\int_{\partial R_h} \kappa_g = \int_\alpha \kappa_g + \int_\beta \kappa_g = 0 - 2\pi\sqrt{1-h^2}\cdot(h/\sqrt{1-h^2}) = -2\pi h$. Infine, per il punto (i) $\chi(R_h) = 0$. Dunque da

$$\int_{R_h} K\, d\mathrm{A} + \int_{\partial R_h} \kappa_g = 2\pi\chi(R_h)$$

si deduce $\mathrm{Area}(R_h) - 2\pi h = 0$, e dunque l'area richiesta è uguale a $2\pi h$.