Corso di Geometria e Topologia Differenziale

Appello del 22/2/2018

La durata della prova è di 2 ore e 30 minuti.

Esercizio 1. (8 punti)
Siano E e C le superfici di $\mathbb{R}^3$ così definite: E è l'immagine di $\mathbb{R}^2$ tramite il diffeomorfismo sull'immagine dato da

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 , \qquad \varphi(u,v) = (\sinh v \cos u, \sinh v \sin u, u) ,$$

mentre C è la superficie ottenuta facendo ruotare intorno all'asse delle z la curva $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\gamma(t) = (\cosh t, 0, t)$. Dando per buono che quelle descritte sono davvero superfici, si dimostri che E e C sono localmente isometriche.

Soluzione. Svolto a lezione.

Esercizio 2. (12 punti)
Sia $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare e parametrizzata per lunghezza d'arco con riferimento di Frenet t, n, b. Si assuma $\tau(s) \neq 0$ per ogni $s \in I$, siano $c \in \mathbb{R}^3$ ed $R > 0$, e si consideri la funzione

$$F\colon I \to \mathbb{R} , \qquad F(s) = \|\gamma(s) - c\|^2 - R^2 .$$

(i) Sia $s_0 \in I$. Si dimostri che esistono unici $c \in \mathbb{R}^3$ ed $R > 0$ per cui si abbia

$$F(s_0) = F'(s_0) = F''(s_0) = F'''(s_0) = 0 .$$

La sfera di centro $c(s_0) := c$ e raggio $R(s_0) := R$ viene detta *sfera osculatrice* di γ in s_0. Si mostri anche che

$$c = \gamma + \frac{1}{\kappa} n + \frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} b ,$$

dove κ e τ sono la curvatura e la torsione di γ.

(ii) Si mostri che il supporto di γ è contenuto in una sfera se e solo se $c(s_0)$ non dipende da s_0.

Soluzione. (i): Derivando tre volte l'uguaglianza che definisce F (usando le formule di Frenet) e uguagliando a zero in s_0 otteniamo

$$F' = 2\langle \gamma', \gamma - c\rangle = 2\langle t, \gamma - c\rangle ,$$

da cui $\langle t, \gamma - c\rangle = 0$,

$$F'' = 2\langle \kappa n, \gamma - c\rangle + 2\langle t, t\rangle = 2\kappa\langle n, \gamma - c\rangle + 2 ,$$

da cui $\langle n, \gamma - c\rangle = -1/\kappa$,

$$F''' = 2\kappa'\langle n, \gamma - c\rangle + 2\kappa\langle -\kappa t - \tau b, \gamma - c\rangle + 2\kappa\langle n, t\rangle = -2\frac{\kappa'}{\kappa} - 2\kappa\tau\langle b, \gamma - c\rangle$$

(dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato le relazioni già trovate in precedenza), da cui $\langle b, \gamma - c\rangle = -\kappa'/(\kappa^2\tau)$. Poiché t, n, b è una base ortonormale, ne segue che la condizione richiesta nel testo è verificata se e solo se

$$\gamma - c = -\frac{1}{\kappa}n - \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}b\,, \qquad R = \|\gamma - c\| \ ,$$

ovvero

$$c = \gamma + \frac{1}{\kappa}n + \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}b\,, \qquad R = \|\gamma - c\| \ ,$$

come voluto.

(ii) Ovviamente, se γ giace sulla sfera di centro c e raggio R, allora la funzione $s \mapsto \|\gamma(s) - c\|^2 - R^2$ è identicamente nulla, per cui per definizione $c(s_0) = c$ per ogni $s_0 \in I$ (e $R(s_0) = R$).

Viceversa, supponiamo che c sia costante (ed indichiamo semplicemente con c il valore di tale costante). Per dimostrare che il supporto di γ è contenuto in una sfera di centro c è sufficiente dimostrare che la quantità $R(s) = \|\gamma(s) - c\|$ è costante, o, equivalentemente, che è costante $R^2(s) = \|\gamma(s) - c\|^2$. Derivando questa funzione otteniamo

$$(R^2)'(s) = 2\langle\gamma'(s), \gamma(s) - c\rangle \ .$$

Per quanto dimostrato al punto precedente, poiché c è il centro della sfera osculatrice all'istante s, il secondo membro di questa uguaglianza è nullo, e da ciò discende la tesi.

Un altro modo (molto più laborioso) di procedere è il seguente. Poiché $c' = 0$ usando l'espressione per c trovata al punto precedente e le formule di Frenet si ottiene

$$0 = t + \left(\frac{1}{\kappa}\right)' n + \frac{1}{k}n' + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)' b + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right) b' = \left(-\frac{\tau}{\kappa} + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)'\right) b \ ,$$

e

(1) $$-\frac{\tau}{\kappa} + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)' = 0 \ .$$

Ora

$$\|\gamma(s) - c\|^2 = \left\|-\frac{1}{\kappa}n - \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}b\right\|^2 = \frac{1}{\kappa^2} + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)^2 \ .$$

Derivando questa quantità si ottiene

$$2\left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)\left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)' - 2\frac{\kappa'}{\kappa^3} = \frac{2\kappa'}{\kappa^2}\left(\frac{1}{\tau}\left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)' - \frac{1}{\kappa}\right) \ ,$$

che si annulla identicamente in virtù di (1).

Esercizio 3. (10 punti)
Siano $a, b > 0$ costanti positive e sia

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = ax^2 + by^2\} \ .$$

(i) Si mostri che S è una superficie e se ne determini una parametrizzazione globale.
(ii) Si calcoli la curvatura gaussiana di S in ogni suo punto.
(iii) Per ogni $p \in S \setminus \{0\}$, si mostri che

$$K(p) = \frac{4ab \cdot d(p, T_p(S))^4}{z(p)^4} \ ,$$

dove K è la curvatura gaussiana, $d(p, T_p(S))$ denota la distanza di p dallo spazio tangente ad S in p, e $z(p)$ denota la coordinata z del punto p.

Soluzione. (i): L'insieme S è grafico della funzione liscia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(u,v) = au^2 + bv^2$, per cui è una superficie una cui parametrizzazione globale è data da

$$x\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\,, \quad x(u,v) = (u, v, au^2 + bv^2)\ .$$

(ii): Si ha facilmente

$$x_u = (1, 0, 2au)\ , \qquad x_v = (0, 1, 2bv)\ ,$$

per cui

$$N = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|} = \frac{(-2au, -2bv, 1)}{\sqrt{1 + 4a^2u^2 + 4b^2v^2}}\ .$$

Inoltre

$$x_{uu} = (0, 0, 2a)\,, \qquad x_{uv} = 0\,, \qquad x_{vv} = (0, 0, 2b)\ ,$$

per cui le matrici della prima e della seconda forma fondamentale sono date rispettivamente da

$$\begin{pmatrix} 1 + 4a^2u^2 & 4abuv \\ 4abuv & 1 + 4b^2v^2 \end{pmatrix}\,, \qquad \frac{1}{\sqrt{1 + 4a^2u^2 + 4b^2v^2}} \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}\ .$$

Dunque la curvatura gaussiana, essendo il rapporto tra i determinanti della II e della I forma fondamentale, è data da

$$K(u,v) = \frac{4ab}{(1 + 4a^2u^2 + 4b^2v^2)^2}$$

(iii): La distanza del punto $p = x(u,v)$ da $T_p(S)$ è data dal valore assoluto della proiezione di p sul versore normale N ad S in p. Si ha pertanto

$$\begin{aligned} d(p, T_p(S)) &= \frac{1}{\sqrt{1 + 4a^2u^2 + 4b^2v^2}} \left|\langle (u, v, au^2 + bv^2), (-2au, -2bv, 1)\rangle\right| \\ &= \frac{au^2 + bv^2}{\sqrt{1 + 4a^2u^2 + 4b^2v^2}} = \frac{z(p)}{\sqrt{1 + 4a^2u^2 + 4b^2v^2}}\ . \end{aligned}$$

Elevando alla quarta pontenza e moltiplicando per $4ab$ si ottiene

$$4ab \cdot d(p, T_p(S))^4 = \frac{4ab \cdot z(p)^4}{(1 + 4a^2u^2 + 4b^2v^2)^2} = K(p) \cdot z(p)^4\ ,$$

da cui la tesi.