Corso di Geometria e Topologia Differenziale

Appello del 20/6/2019

La durata della prova è di 2 ore e 30 minuti.

Esercizio 1. (8 punti)
Sia $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva liscia, dove I è un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ (eventualmente illimitato). Si mostri che γ è regolare se e solo se ammette una riparametrizzazione per lunghezza d'arco.
Soluzione.

Svolto a lezione.

Esercizio 2. (12 punti)
Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientabile dotata di versore normale $N\colon S \to S^2$, e sia $\gamma\colon (-a,a) \to S$ una linea di curvatura di S parametrizzata per lunghezza d'arco. Sia inoltre

$$\varphi\colon (-a,a) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\,, \qquad \varphi(u,v) = \gamma(u) + vN(\gamma(u))\ .$$

(i) Si mostri che esiste $\varepsilon > 0$ tale che la restrizione di φ a $(-\varepsilon,\varepsilon)\times(-\varepsilon,\varepsilon)$ è una parametrizzazione di una superficie $\Sigma \in \mathbb{R}^3$.
(ii) Si calcoli un versore normale $\overline{N}\colon \Sigma \to S^2$ per Σ.
(iii) Si mostri che la curvatura gaussiana di Σ è uguale a 0 in ogni suo punto.

Soluzione. (i): Poiché γ è una linea di curvatura, esiste una funzione $\lambda\colon (-a,a) \to \mathbb{R}$ tale che $dN_{\gamma(u)}(\gamma'(u)) = \lambda(u)\gamma'(u)$ (in effetti, $\lambda(u)$ è uguale all'opposto della curvatura normale di γ in $\gamma(u)$). Inoltre, poiché $\|\gamma'(u)\| = 1$ si ha $\lambda(u) = \langle dN_{\gamma(u)}(\gamma'(u)), \gamma'(u)\rangle$, per cui λ è una funzione liscia.

Si ha

$$\varphi_u = \gamma'(u) + v dN_{\gamma(u)}(\gamma'(u)) = (1 + v\lambda(u))\gamma'(u)\,, \qquad \varphi_v = N(\gamma(u))\ .$$

In particolare, $\varphi_u(0,0) = \gamma'(0)$, $\varphi_v(0,0) = N(\gamma(0))$. Questi due vettori sono linearmente indipendenti, per cui il rango di $d\varphi$ in $(0,0)$ è uguale a 2. Di conseguenza, esiste un intorno U di $(0,0)$ in $(-a,a) \times \mathbb{R}$ tale che $\varphi|_U$ sia un diffeomorfismo con l'immagine. Tale U può essere scelto della forma $(-\varepsilon,\varepsilon) \times (-\varepsilon,\varepsilon)$ per qualche $\varepsilon > 0$, e ciò prova (i).

(ii): Detto $\overline{N}\colon \Sigma \to S^2$ il versore normale associato a φ, si ha (identificando come sempre N con $N \circ \varphi$):

$$\overline{N}(u,v) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = \frac{(1 + v\lambda(u))\gamma'(u) \wedge N(\gamma(u))}{\|(1 + v\lambda(u))\gamma'(u) \wedge N(\gamma(u))\|} = \gamma'(u) \wedge N(\gamma(u))$$

(si noti che $1 + v\lambda(u) \neq 0$ in quanto $\varphi_u \neq 0$, e che $\gamma'(u) \wedge N(\gamma(u))$ ha norma unitaria in quanto prodotto vettore di due versori ortonormali).

(iii): Da quanto visto in (ii), in goni punto di Σ si ha

$$d\overline{N}(\varphi_v) = \frac{\partial \overline{N}(u,v)}{\partial v} = 0\ .$$

Dunque in ogni punto di Σ il differenziale della mappa di Gauss di Σ è singolare, e la curvatura di Gauss di Σ, che ne è il determinante, è nulla.

In alternativa, si può procedere come segue. Derivando φ_u e φ_v si ottiene

$$\varphi_{uv} = \varphi_{vu} = dN_{\gamma(u)}(\gamma'(u)) = \lambda(u)\gamma'(u)\,, \qquad \varphi_{vv} = 0$$

(conoscere φ_{uu} non sarà necessario in quanto segue). Dunque, detti e, f, g is coefficienti della II forma fondamentale,

$$f = \langle \varphi_{uv}, \overline{N} \rangle = \langle \lambda(u)\gamma'(u), \gamma'(u) \wedge N(\gamma(u)) \rangle = 0\,, \qquad g = \langle \varphi_{vv}, \overline{N} \rangle = 0\ .$$

Dunque la matrice della II forma fondamentale di Σ è data da

$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

ed ha perciò determinante nullo. Ne segue che la curvatura gaussiana di Σ è identicamente nulla.

Esercizio 3. (10 punti)
Si consideri la funzione

$$x\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\,, \qquad x(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)\ .$$

(i) Si mostri che x è la parametrizzazione globale di una superficie S di $\mathbb{R}^3$.
(ii) Si calcoli la curvatura gaussiana di S in ogni suo punto.

Soluzione. (i): La funzione x è chiaramente liscia. Per dimostrare che è un diffeomorfismo con l'immagine è sufficiente dimostrare che essa ammette un'inversa liscia. È immediato verificare che x è iniettiva (se $x(u,v) = x(u',v')$, allora guardando la terza componente si deduce $v = v'$; le prime due componenti danno allora $u\cos v = u'\cos v$, $u\sin v = u'\sin v$, e poiché $\cos v, \sin v$ non possono essere entrambi nulli, si ha $u = u'$).

Sia $S = x(\mathbb{R}^2)$. Per quanto visto x stabilisce una bigezione tra $\mathbb{R}^2$ ed S. Dobbiamo mostrare che $x^{-1} : S \to \mathbb{R}^2$ è liscia. Possiamo ricoprire S con due aperti Ω_1, Ω_2 definiti come segue:

$$\Omega_1 = S \cap \{\cos z \neq 0\}\,, \qquad \Omega_2 = S \cap \{\sin z \neq 0\}\ .$$

(Si noti che effettivamente Ω_1 e Ω_2 ricoprono S in quanto non esiste z tale che $\cos z = \sin z = 0$). Se ψ_i è la restrizione di x^{-1} ad Ω_i, allora si ha

$$\psi_1(x,y,z) = \left(\frac{x}{\cos z}, z\right)\,, \qquad \psi_2(x,y,z) = \left(\frac{y}{\sin z}, z\right)\ .$$

Ciò mostra che x^{-1} è liscia.

(ii): Si ha

$$x_u = (\cos v, \sin v, 0)\,, \qquad x_v = (-u\sin v, u\cos v, 1)\ ,$$

da cui

$$E = 1\,, \qquad F = 0\,, \qquad G = 1 + u^2\ .$$

Inoltre

$$N(u,v) = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|} = \frac{(\sin v, -\cos v, u)}{\sqrt{1+u^2}}\ .$$

Derivando ancora otteniamo

$$x_{uu} = 0\,, \qquad x_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)\,, \qquad x_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)\ ,$$

da cui

$$e = \langle x_{uu}, N \rangle = 0\,, \quad f = \langle x_{uv}, N \rangle = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,, \quad g = \langle x_{vv}, N \rangle = 0\ .$$

Dunque

$$k = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{(1+u^2)^2} \ .$$