# Corso di Geometria e Topologia Differenziale

## Appello del 18/9/2019

**La durata della prova è di 2 ore e 30 minuti.**

**Esercizio 1. (8 punti)**
Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie compatta. Si mostri che esiste $p \in S$ tale che la curvatura gaussiana di $S$ in $p$ sia positiva.

**Soluzione.** Svolto a lezione.

**Esercizio 2. (10 punti)**
Si esibisca una elica circolare retta $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ parametrizzata per lunghezza d'arco avente sia curvatura sia torsione uguali a 1 in ogni punto.

**Soluzione.** Come visto a lezione, le curve aventi sia curvatura sia torsione costanti sono le eliche circolari rette. Siano dunque fissati $r > 0$, $\omega > 0$ e $a \in \mathbb{R}$, sia

$$\gamma(s) = (r\cos\omega s, r\sin\omega s, as) \ ,$$

e imponiamo su $\gamma$ tutte le condizioni richieste. Indichiamo con $t, n, b$ il triedro di Frenet di $\gamma$, e con $\kappa, \tau$ la curvatura e la torsione di $\gamma$.

Si ha

$$\gamma'(s) = (-\omega r\sin\omega s, \omega r\cos\omega s, a) \ ,$$

che ha norma $\sqrt{\omega^2 r^2 + a^2}$, per cui affinché $\gamma$ sia p.l.a. richiediamo che

$$\omega^2 r^2 + a^2 = 1 \ .$$

Sotto questa condizione abbiamo $t(s) = \gamma'(s)$, e

$$\kappa(s)n(s) = \gamma''(s) = (-\omega^2 r\cos\omega s, -\omega^2 r\sin\omega s, 0) \ ,$$

per cui, imponendo $\kappa(s) = 1$ e ricordando che $n(s)$ è un versore,

$$\omega^4 r^2 = 1\,, \qquad n(s) = (-\cos\omega s, -\sin\omega s, 0) \ .$$

Perciò

$$b(s) = t(s) \wedge n(s) = (a\sin\omega s, -a\cos\omega s, \omega r)\,, \qquad b'(s) = (\omega a\cos\omega s, \omega a\sin\omega s, 0) = -bn(s) \ ,$$

e $\tau(s) = -\omega a$, da cui $\omega a = -1$. Ricapitolando, abbiamo

$$\begin{cases} \omega^2 r^2 + a^2 = 1 \\ \omega^4 r^2 = 1 \\ \omega a = -1 \ . \end{cases}$$

Dopo facili conti (si può per esempio ricavare $a$ dall'ultima equazione, per poi sostituire nelle equazioni precedenti), si ottiene

$$\omega = \sqrt{2}\,, \quad r = \frac{1}{2}\,, \quad a = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ ,$$

per cui la curva richiesta è data da

$$\gamma(s) = \left(\frac{1}{2}\cos\sqrt{2}s, \frac{1}{2}\sin\sqrt{2}s, -\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \ .$$

**Esercizio 3. (12 punti)**
Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da
$$f(u,v) = \left( u - \frac{u^3}{3} + uv^2, -v + \frac{v^3}{3} - u^2 v, u^2 - v^2 \right) .$$

(i) Si mostri che esiste un intorno aperto $\Omega$ di $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ tale che, posto $x = f|_\Omega$ e $S = x(\Omega)$,, si ha che
$$x\colon \Omega \to S$$
è la parametrizzazione globale di una superficie.

(ii) Si calcolino le curvature principali di $S$.

**Soluzione.** (i): Le derivate parziali di $f$ sono date da
$$f_u(u,v) = (1 - u^2 + v^2, -2uv, 2u) , \quad f_v(u,v) = (2uv, -1 + v^2 - u^2, -2v) ,$$
dunque $f_u(0,0) = (1,0,0)$ e $f_v(0,0) = (0,-1,0)$ sono linearmente indipendenti. Ciò equivale al fatto che $df_0$ sia iniettivo. Ne segue che esiste un intorno aperto $\Omega$ di 0 tale che $f|_\Omega$ sia un diffeomorfismo con l'immagine, il che implica la tesi.

(ii): Ovviamente si ha $x_u = f_u$ e $x_v = f_v$ in ogni punto di $\Omega$. Ne segue subito che la I forma fondamentale è rappresentata dalla matrice
$$A = \begin{pmatrix} (1 + u^2 + v^2)^2 & 0 \\ 0 & (1 + u^2 + v^2)^2 \end{pmatrix} .$$
Inoltre,
$$N(u,v) = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|} = \frac{(2u, 2v, u^2 + v^2 - 1)}{u^2 + v^2 + 1} .$$
Le derivate seconde di $x$ sono uguali a
$$x_{uu} = (-2u, -2v, 2) , \quad x_{uv} = (2v, -2u, 0) , \quad x_{vv} = (2u, 2v, -2) .$$
Calcolandone il prodotto scalare con il versore normale appena descritto si ottiene che la seconda forma fondamentale è descritta dalla matrice
$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} .$$
Poiché le curvature principali di $S$ sono gli autovalori della matrice $A^{-1}B$, se ne deduce che esse sono date da
$$k_1 = -\frac{2}{(u^2 + v^2 + 1)^2} , \qquad k_2 = \frac{2}{(u^2 + v^2 + 1)^2} .$$