Corso di Geometria e Topologia Differenziale

Appello del 10/1/2019

La durata della prova è di 2 ore e 30 minuti.

Esercizio 1. (11 punti)
Siano $E \subseteq \mathbb{R}^3$, $C \subseteq \mathbb{R}^3$ l'elicoide e la catenoide, ovvero, rispettivamente, la superficie dotata di parametrizzazione globale

$$x\colon \mathbb{R}^2 \to E\,, \qquad x(u,v) = (v\cos u, v\sin u, u)$$

e la superficie di rotazione ottenuta facendo ruotare intorno all'asse z la curva $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cosh t, 0, t)$.

(i) Si calcoli la curvatura di Gauss di E in ogni suo punto.

(ii) Si definisca una mappa $f\colon E \to C$ che sia un'isometria locale (dimostrando che effettivamente lo è). A questo scopo, può essere utile ricordare che la curvatura di Gauss di C nel punto $(\cosh t\cos s, \cosh t \sin s, t)$ è data da $-1/\cosh^4 t$.

Soluzione.
Svolto a lezione.

Esercizio 2. (9 punti)
Si consideri la curva $\gamma\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\gamma(t) = \Big(2t\Big(\cos(\log t) + \sin(\log t)\Big), 2t\Big(\cos(\log t) - \sin(\log t)\Big), 3t\Big)\ .$$

(i) Si determini una riparametrizzazione di γ per lunghezza d'arco.

(ii) Si calcolino curvatura e torsione di γ.

Soluzione. (i): Si ha

$$\gamma'(t) = (4\cos(\log t), -4\sin(\log t), 3)\ ,$$

da cui $\|\gamma'(t)\| = 5$, ed una riparametrizzazione per lunghezza d'arco di γ è data da $\alpha(s) = \gamma(s/5)$, ovvero

$$\alpha(s) = \left(\frac{2s}{5}\Big(\cos\left(\log\frac{s}{5}\right) + \sin\left(\log\frac{s}{5}\right)\Big), \frac{2s}{5}\Big(\cos\left(\log\frac{s}{5}\right) - \sin\left(\log\frac{s}{5}\right)\Big), \frac{3s}{5}\right)\ .$$

(ii): Ovviamente è sufficiente calcolare curvatura e torsione di α. Indichiamo con t, n, b il triedro di Frenet di α, e con κ e τ le sue curvatura e torsione. Si ha

$$t(s) = \alpha'(s) = \left(\frac{4}{5}\cos\left(\log\frac{s}{5}\right), -\frac{4}{5}\sin\left(\log\frac{s}{5}\right), \frac{3}{5}\right)\ ,$$

da cui

$$t'(s) = \left(-\frac{4}{5s}\sin\left(\log\frac{s}{5}\right), -\frac{4}{5s}\cos\left(\log\frac{s}{5}\right), 0\right)\ ,$$

e

$$\kappa(s) = \|t'(s)\| = \frac{4}{5s}\,, \qquad n(s) = \frac{t'(s)}{\kappa(s)} = \left(-\sin\left(\log\frac{s}{5}\right), -\cos\left(\log\frac{s}{5}\right), 0\right)\ .$$

Dunque

$$b(s) = t(s) \wedge n(s) = \left(\frac{3}{5} \cos\left(\log \frac{s}{5}\right), -\frac{3}{5} \sin\left(\log \frac{s}{5}\right), -\frac{4}{5} \right)$$

e

$$b'(s) = \left(-\frac{3}{5s} \sin\left(\log \frac{s}{5}\right), -\frac{3}{5s} \cos\left(\log \frac{s}{5}\right), 0 \right) = \frac{3}{5s} n(s) \ .$$

Perciò, per definizione di torsione,

$$\tau(s) = \frac{3}{5s} \ .$$

Esercizio 3. (10 punti)
Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientabile connessa. Per ogni $p \in S$, sia $r(p)$ la retta affine perpendicolare ad S in p, ovvero l'unica retta affine di $\mathbb{R}^3$ passante per p e avente giacitura ortogonale a T_pS. Si supponga che, al variare di $p \in S$, le rette $r(p)$ siano tutte concorrenti in un punto $q \in \mathbb{R}^3$. Si mostri che S è contenuta in una sfera.

Soluzione. Essendo orientabile, la superficie S ammette un versore normale unitario $N\colon S \to S^2$. Consideriamo ora la funzione

$$f\colon S \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x) = \|x - q\|^2 = \langle x - q, x - q \rangle \ ,$$

che è ovviamente liscia. Per giungere alla tesi è sufficiente dimostrare che f è costante, in quanto in tal caso, posto $R = \sqrt{f}$, si avrà che S è contenuta nella sfera di centro q e raggio R (si noti che f è ovviamente non negativa, e se costante non può essere uguale a 0 in quanto in tal caso si avrebbe $S = \{q\}$, contro il fatto che S è una superficie).

Poiché S è connessa, è sufficiente dimostrare che f è localmente costante, ovvero che $df_p = 0$ per ogni $p \in S$. D'altronde, per ogni $p \in S$, $v \in T_pS$ si ha

$$df_p(v) = 2\langle v, p - q \rangle = 0 \ ,$$

in quanto $v \in T_pS$ e $p - q \perp T_pS$ per ipotesi. Ciò conclude la dimostrazione.

Una dimostrazione alternativa può essere ottenuta come segue. L'ipotesi può essere riscritta così: esiste una funzione $\lambda\colon S \to \mathbb{R}$ tale che

$$p + \lambda(p)N(p) = q$$

per ogni $p \in S$. Prendendo il prodotto scalare di ambo i membri dell'uguaglianza con $N(p)$ e riordinando i termini si ottiene

$$\lambda(p) = \langle q - p, N(p) \rangle \ ,$$

il che mostra che λ è una funzione liscia. Differenziando quest'ultima uguaglianza, per ogni $p \in S$ e $v \in T_pS$ si ottiene (ricordando che q è costante)

$$d\lambda_p(v) = -\langle v, N(p) \rangle + \langle q - p, dN_p(v) \rangle \ .$$

Si ha tuttavia $v \perp N(p)$ in quanto $v \in T_pS$, e $q - p \perp dN_p(v)$ in quanto $q - p = \lambda(p)N(p)$ e $dN_p(v) \in T_pS$. Dunque $d\lambda_p = 0$ per ogni $p \in S$, per cui λ è localmente costante. Per connessione di S, si deduce che λ è globalmente costante e uguale a un valore $\lambda \in \mathbb{R}$. Poiché $p = q - \lambda N(p)$, ne segue che $\|p - q\| = |\lambda|$, per cui S è contenuta nella sfera di centro q e raggio $|\lambda|$ (ed in particolare $\lambda \neq 0$).