PROGRAMMA DI GEOMETRIA E TOPOLOGIA DIFFERENZIALE A.A. 2014-2015

1. Parte I: Curve nello spazio

Definizione di curva, velocità, supporto, riparametrizzazione. Lunghezza di una curva. Curve regolari. Un esempio di curva non regolare: la cuspide. Una curva ammette una riparametrizzazione per lunghezza d'arco se e solo se è regolare. La cicloide. Definizione di versore tangente e di curvatura. Definizione di versore normale. Una curva regolare ha curvatura nulla se e solo se il suo supporto giace su una retta.

Orientazione di uno spazio vettoriale reale. Definizione e proprietà del prodotto vettore, e suo comportamento rispetto a trasformazioni ortogonali e speciali ortogonali. Curve biregolari. Definizione di versore binormale e di torsione. Definizione di piano e di cerchio osculatore. Curvatura e torsione di trattrice ed elica. Una curva biregolare è piana se e solo se ha torsione nulla. Il segno della torsione determina il verso nel quale la curva attraversa il piano osculatore.

Formule di Frenet. Definizione di congruenza fra curve. Comunque assegnate una funzione positiva k ed una funzione reale t, esiste una curva che abbia k come curvatura e t come torsione; inoltre, tale curva è unica a meno di congruenza. Una curva biregolare ha curvatura e torsione costanti se e solo se è congruente a un'elica. Curvatura e torsione di una curva con parametrizzazione qualsiasi. Catenaria. Curvatura di una curva espressa come $\rho(\theta)$. Cardioide. Curvatura totale di una curva e mappa di Gauss.

2. Parte II: Prime nozioni di teoria delle varietà

Funzioni lisce e diffeomorfismi tra aperti di spazi euclidei e loro differenziale. Descrizione del differenziale tramite la velocità di curve. Teorema di invertibilità locale. Definizione di liscezza per funzioni tra sottoinsiemi qualsiasi di spazi euclidei. Diffeomorfismi tra sottoinsiemi di spazi euclidei. Definizione di varietà, carta locale, parametrizzazione locale. Alcuni esempi di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ che non sono varietà. La sfera n-dimensionale è una varietà in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Definizione di spazio tangente di varietà (tramite l'uso di curve) e sua descrizione come l'immagine del differenziale di una parametrizzazione locale. A meno di un cambio di coordinate liscio in arrivo, una mappa tra aperti di spazi euclidei il cui differenziale è iniettivo è localmente un'inclusione. Alcune definizioni equivalenti di parametrizzazione locale. Dimensione dello spazio tangente di una varietà. Definizione di differenziale di mappe tra varietà.

Definizione di punto e valore critico e regolare. La preimmagine di un valore regolare di una funzione liscia f è una varietà, i cui spazi tangenti coincidono con il ker del differenziale di f. Le quadriche sono varietà differenziabili. Gli spazi di matrici $GL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R}])$ e $O(n)$ sono varietà differenziabili.

Definizione di campo vettoriale e di frame locale. Frames indotti da carte locali. Definizione di orientazione di una varietà e di atlante orientato. Una varietà è orientabile se e solo se ammette un atlante orientato. Definzione di spazio normale e di campi normali. Varietà pettinabili e parallelizzabili. Le sfere dispari sono pettinabili, S^1 e S^3 sono parallelizzabili. Una ipersuperficie è orientabile se e solo se ha un campo normale mai nullo. La controimmagine di un valore regolare di una funzione reale è orientabile. Il nastro di Moebius. Superfici di rivoluzione: il toro.

Immersioni ed embeddings. Un'immersione iniettiva e aperta sull'immagine è un embedding.

3. Parte III: Teoria metrica delle superfici

Prima forma fondamentale. Mappa di Gauss. Il differenziale della mappa di Gauss è autoaggiunto. Seconda forma fondamentale. Direzioni principali, curvature principali, curvatura di Gauss. Il caso del piano, della sfera, del cilindro. Calcolo della I forma fondamentale su varie superfici. Curva lossodromica nella sfera. II forma fondamentale: sfera, cilindro, punto di sella. Interpretazione geometrica della II forma fondamentale come curvatura normale di una curva. Punti iperbolici, ellittici, parabolici, ombelicali.

Ogni superficie compatta contiene un punto ellittico. Calcolo delle forme fondamentali, del differenziale della mappa di Gauss, delle curvature principali e della curvatura di Gauss a partire da una parametrizzazione. Forme fondamentali e curvature per superfici di rotazione. Definizione di pseudosfera e calcolo della sua curvatura Gaussiana. Ogni superficie è localmente il grafico di una funzione, e se le prime derivate si annullano la II forma è l'Hessiano.

Definizione di congruenza e di isometria tra superfici. Definizione di isometria locale e criterio di isometria locale in coordinate. Il piano, il cilindro e il cono sono localmente isometrici. Discussione della nozione di grandezza intrinseca. Definizione dei simboli di Christoffel. I simboli di Christoffel sono intrinseci. Teorema Egregium di Gauss.

Definizione di campo lungo una curva e di derivata covariante lungo una curva. Campi paralleli. La derivata covariante è un operatore intrinseco. Trasporto parallelo. Definizione di geodetica. Integrale di una funzione su una superficie, area di una superficie. Area del toro. Catenoide e elicoide sono localmente isometriche. Le isometrie di una superficie sono un gruppo. Sfera e piano non sono localmente isometrici.

Non esistenza di coordinate ortonormali sulla sfera. Teorema di esistenza di coordinate ortogonali (senza dimostrazione). Teorema di esistenza e unicità per le geodetiche. Le isometrie locali portano geodetiche in geodetiche. Le geodetiche del piano, del cilindro, della sfera e del cono. Superfici di rivoluzione: calcolo dei simboli di Christoffell e relazione di Clairaut. Valore algebrico della derivata covariante di campi unitari lungo curve. Curvatura geodetica di una curva. Determinazione dell'angolo tra campi unitari lungo curve e sua relazione con la derivata covariante.

Definizione di regione, regione semplice, regione piccola. Teorema di Gauss-Bonnet locale. Definizione di triangolazione e triangolazione piccola. Definizione e invarianza (solo enunciata) della caratteristica di Eulero-Poincaré. Caratteristica delle superfici orientabili compatte. Teorema di Gauss-Bonnet globale. Una superficie compatta orientabile con curvatura di Gauss ovunque non negativa è omeomorfa alla sfera.

4. Parte IV: Elementi di Topologia Differenziale

In una funzione liscia $f\colon M \to N$ fra varietà della stessa dimensione con M compatta, la cardinalità della controimmagine di un valore regolare è localmente costante. Varietà a bordo. Controimmagine di valori regolari per funzioni su varietà a bordo è varietà a bordo. Non esistono retrazioni lisce di una varietà compatta sul suo bordo. Teorema del punto fisso di Brouwer.

Omotopie e isotopie lisce. Grado modulo due: invarianza rispetto a omotopie lisce e rispetto al valore regolare scelto. Lemma di omogeneità per varietà connesse. Le funzioni costante e identità su una varietà compatta senza bordo non sono omotope. Orientazione sul bordo indotta dall'orientazione di una varietà. Definizione, buona definizione e moltiplicatività rispetto alla composizione del grado intero per mappe tra varietà compatte orientate e senza bordo. Calcolo del grado della mappa antipodale. La n-sfera è pettinabile se e solo se n è dispari. Se n è pari, una mappa dalla n-sfera in sé ha un punto fisso, oppure manda un punto nel suo antipodale.

Indice di uno zero isolato in un campo vettoriale: definizione in un aperto di $\mathbb{R}^n$ e poi in una varietà qualsiasi. Ogni diffeomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che preserva l'orientazione è isotopo all'identità. Teorema di Poincaré-Hopf (solo enunciato). Lemma di Hopf. Zeri non degeneri in campi vettoriali: definizione per aperti di $\mathbb{R}^n$ e poi per campi tangenti in varietà qualsiasi. Uno zero non degenere ha indice $+1$ o -1.

Definizione di fibrato normale. Il fibrato normale è una varietà. Definizione ed esistenza dell'intorno tubolare per varietà compatte senza bordo. Teorema di Poincaré-Hopf per campi con zeri non degeneri su varietà compatte senza bordo.