ESERCIZI

(1) Esiste un polinomio $P(z)$ tale che la funzione $P(z)e^{1/z}$ è definita su tutto $\mathbb{C}$ ed è olomorfa (cioè, $P(z)e^{1/z}$ è intera)? Fornire un'espansione in serie di Laurent di $e^{1/z}$ per $|z| \neq 0$.

(2) Sia

$$f(z) = \frac{z}{1+z^3}$$

Determinare la serie di Laurent di f, centrata in zero:
   (a) nel disco $|z| < 1$;
   (b) nella regione $|z| > 1$.

(3) Sia

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

Determinare la serie di Laurent di f, centrata in zero:
   (a) nel disco $|z| < 1$;
   (b) nella corona circolare $1 < |z| < 2$;
   (c) nella regione $|z| > 2$.

(4) Mostrare che la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{z^2 + n^2}$$

definisce una funzione meromorfa in $\mathbb{C}$ e determinare l'insieme dei poli.

(5) Mostrare che la serie

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{z+\imath}{z-\imath}\right)^n$$

definisce una funzione analitica sul disco di raggio unitario e centro $z = -\imath$.

(6) Calcolare il residuo in 0 delle seguenti funzioni:
   (a) $(z^2+1)/z$;
   (b) $(z^2+3z-5)/z^3$;
   (c) $\sin(z)/z^4$.

(7) Trovare il residuo in $\imath$ della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^4 - 1}$$

Determinare l'integrale

$$\int_C f(z)$$

dove C è la circonferenza di raggio $1/2$ e centrato in $\imath$.

(8) Calcolare i seguenti integrali sulla circonferenza C di raggio 8 e centro l'orgine:
$$\int_C \frac{1}{\sin(z)}\mathrm{dz} \quad \text{and} \quad \int_C \frac{1}{1-\cos(z)}\mathrm{dz}$$

(9) Calcolare il seguente integrale:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{dx}$$

(10) Sia $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione intera e si supponga che esistano costanti $M \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$ tali che $|f(z)| \leq M \cdot |z|^d$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Si mostri che f è un polinomio di grado al più d. (Suggerimento: si sfruttino le disuguaglianze di Cauchy).

(11) Sia f una funzione meromorfa da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$, avente un numero finito di poli. Si supponga che esistano costanti $M \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$ tali che $|f(z)| \leq M \cdot |z|^d$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Si mostri che $f(z) = p(z)/q(z)$, dove p, q sono polinomi.

(12) Un biolomorfismo tra aperti Ω_1, Ω_2 è una funzione olomorfa e bigettiva con inversa olomorfa. (È possibile in effetti dimostrare che l'inversa di una funzione olomorfa e bigettiva è automaticamente olomorfa).
Sia $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un biolomorfismo.
   (a) Sia $g\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ definita da $g(z) = f(1/z)$. Si mostri che f è un polinomio se e solo se g ha un polo in 0.
   (b) Sfruttando il Teorema di Weierstrass–Casorati ed il punto precedente, si mostri che f è un polinomio.
   (c) Si concluda che esistono $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ per cui $f(z) = az + b$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

(13) Si mostri che la funzione
$$f(z) = \frac{z - \imath}{z + \imath}$$
stabilisce un biolomorfismo tra il semipiano $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} \, : \, \Im(z) > 0\}$ e il disco unitario $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} \, : \, |z| < 1\}$.

(14) Il semipiano Ω_1 introdotto nell'esercizio precedente è biolomorfo a $\mathbb{C}$? (Suggerimento: si sfruttino l'esercizio precedente e il Teorema di Liouville).