Corso di Laurea in Matematica
Geometria 2 – Esercizi

In tutti questi esercizi, si può assumere che tutti gli spazi siano localmente connessi per archi. Inoltre, come da definizione, lo spazio base di un rivestimento è necessariamente connesso (e dunque, essendo localmente connesso per archi, anche connesso per archi).

1. Sia $p\colon E \to X$ un omeomorfismo locale tra spazi di Hausdorff. Si assuma che E sia compatto e che X sia connesso per archi.

(1) Si mostri che, per ogni $x \in X$, l'insieme $p^{-1}(x)$ è finito.
(2) Fissato $x \in X$, sia $p^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_n\}$. Si mostri che esistono aperti a due a due disgiunti $V_1, \dots, V_n$ di E tali che $y_i \in V_i$ per ogni i e $p|_{V_i}\colon V_i \to U_i$ sia un omeomorfismo su un intorno aperto U_i di x in X.
(3) Si mostri che p è un rivestimento.

2. Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento. Si mostri che, se X è T_2, anche E è T_2.

3. Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento di grado finito. Si mostri che X è compatto di Hausdorff se e solo se E è compatto di Hausdorff.

4. Sia X uno spazio topologico, e sia $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un ricoprimento aperto di X tale che $U_n \subseteq U_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si supponga che U_n sia semplicemente connesso per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si mostri che X è semplicemente connesso. (Suggerimento: si fissi $x_0 \in U_0$, e si osservi che i loops basati in x_0 hanno immagine compatta).

5. Siano $X = (\mathbb{R} \times \{-1, 1\})/\sim$, dove $(x,t) \sim (y,t')$ se e solo se $(x,t) = (y,t')$ oppure $x = y \neq 0$, e $E = (\mathbb{R} \times \mathbb{Z})/\sim'$, dove $(x,n) \sim' (y,m)$ se e solo se $(x,n) = (y,m)$ oppure $x = y > 0$, $n = 2i$, $m = 2i+1$, $i \in \mathbb{Z}$, oppure $x = y < 0$, $n = 2i$, $m = 2i-1$, $i \in \mathbb{Z}$.

Sia infine $p\colon E \to X$ definita da

$$p([(x,t)]) = \begin{cases} [(x,1)] = [(x,-1)] & \text{se } x \neq 0 \\ [(0,1)] & \text{se } (x,t) = (0,2i) \\ [(0,-1)] & \text{se } (x,t) = (0,2i+1)\ . \end{cases}$$

(1) Si mostri che p è ben definita e continua.
(2) Si mostri che p è un rivestimento.
(3) Si mostri che E è semplicemente connesso. (Suggerimento: potrebbe essere utile usare l'esercizio precedente).
(4) Si calcoli il gruppo degli automorfismi $\mathrm{Aut}(E,p)$.
(5) Si calcoli $\pi_1(X)$.

6. Sia X lo spazio topologico dell'Esercizio precedente. Si mostri che, nonostante $\pi_1(X) \cong \pi_1(S^1)$, lo spazio X non è omotopicamente equivalente a S^1. (Suggerimento: sfruttando le (mancate) proprietà di separazione di X, si mostri che qualsiasi mappa continua $f\colon X \to S^1$ fattorizza tramite $\mathbb{R}$, ovvero che esistono $g\colon X \to \mathbb{R}$ e $h\colon \mathbb{R} \to S^1$ continue tali che $f = h \circ g$; si deduca che $f_*\colon \pi_1(X) \to \pi_1(S^1)$ non può essere un isomorfismo).

7. Sia $n \geq 1$, e sia $f\colon S^n \to S^n$ continua tale che $f(x) \neq -x$ per ogni $x \in S^n$. Si dimostri che f è omotopa all'identità. (Suggerimento: si cerchi un cammino "canonico" che congiunge x a $f(x)$).

8. Sia n dispari, e sia $f\colon S^n \to S^n$ continua definita da $f(x) = -x$. Si mostri che f è omotopa all'identità. (Se n è pari, ciò è falso, ma una dimostrazione di questo fatto non può essere fornita con gli strumenti sviluppati in questo corso; per gli interessati si rimanda a GTD).

9. Un *gruppo topologico* è uno spazio topologico G dotato di una struttura di gruppo tale che le applicazioni

$$\begin{aligned} m\colon G \times G \to G\,, &\qquad m(g,h) = g \cdot h\ , \\ i\colon G \to G\,, &\qquad i(g) = g^{-1} \end{aligned}$$

sono continue. Sia $e \in G$ l'elemento neutro di G.

(1) Siano γ_1, γ_2 due loops in G basati in e, e sia $H\colon [0,1] \times [0,1] \to G$ la mappa definita da
$$H(t,s) = \gamma_1(t) \cdot \gamma_2(s)\ .$$
Si mostri che H è continua.

(2) Si descriva il loop ottenuto restringendo H al bordo del quadrato $[0,1] \times [0,1]$ in termini di (concatenazioni di) γ_1 e γ_2 (e loro inversi).

(3) Si mostri che $\pi_1(G,e)$ è abeliano.

(4) Si mostri che $S^1 \vee S^1$ (con la sua usuale topologia) non può essere dotato di una struttura di gruppo topologico.

10. Sia G il gruppo delle matrici di $SO(2)$, dotato della topologia di sottospazio dello spazio di tutte le matrici reali 2×2, e dell'usuale struttura di gruppo. Si mostri che G è un gruppo topologico. Si calcoli $\pi_1(SO(2), \mathrm{Id})$.

11. Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento, con E connesso per archi. Si mostri che, se esiste una sezione continua $s\colon X \to E$ tale che $p \circ s = \mathrm{Id}_X$, allora p è un omeomorfismo.

12. Sia $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, e sia $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ la mappa $f(z) = z^d$, dove $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Si mostri che f è un rivestimento di grado d.

13. Sia X una n-varietà topologica connessa, con $n \geq 3$, e sia $p \in X$. Questo esercizio vuole mostrare che $\pi_1(X) \cong \pi_1(X \setminus \{p\})$, cioè che togliere un punto ad X non ne muta il gruppo fondamentale.

(1) Sia $\varphi\colon B \to U$ un omeomorfismo tra la palla aperta $B = B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n$ e un aperto U di X tale che $\varphi(0) = p$ (esiste per definizione di varietà). Sia $C = \overline{B(0,1/2)}$ e sia $V = \varphi(C) \subseteq U \subseteq X$. Si mostri che U, $X \setminus V$, $U \cap (X \setminus V)$ sono aperti connessi per archi di X.
(2) Si mostri che $U \cap (X \setminus V)$ è omotopicamente equivalente a S^{n-1}.
(3) Sia $x_0 \in U \cap (X \setminus V)$. Applicando il Teorema di Van Kampen, si mostri che $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X \setminus V, x_0)$.
(4) Si mostri che $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X \setminus \{p\}, x_0)$.

14. Al variare di $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, si calcoli $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \setminus \{p\})$, dove p è un punto di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

15. Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare di segnatura (a, b, c) su $\mathbb{R}^n$ (per cui $a + b + c = n$; assumiamo ad esempio che a, b, c siano nell'ordine l'indice di positività, di negatività e di nullità di $\langle \cdot, \cdot \rangle$). Sia

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, x \rangle = 1\} \ ,$$

e sia $x_0 \in X$ (assumiamo $a > 0$ in modo che X sia non vuoto).

Si calcoli $\pi_1(X, x_0)$. (Suggerimento: si mostri innanzi tutto che si può supporre $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in forma "standard", ovvero associato ad una matrice diagonale con solo $0, 1, -1$ sulla diagonale; a questo punto, si mostri che X è omotopicamente equivalente ad una sfera).

16. Sia $C \subseteq \mathbb{R}^2$ un convesso chiuso con parte interna non vuota, e sia $p \in C$. Si mostri che:

(1) Se $p \in \partial C$, allora $\pi_1(C \setminus \{p\}) = \{1\}$.
(2) Se $p \in C \setminus \partial C$, allora $\pi_1(C \setminus \{p\}) \cong \mathbb{Z}$.

17. Sia $f\colon D^2 \to D^2$ un omeomorfismo. Si mostri che $f(S^1) = S^1$ (suggerimento: si sfrutti l'esercizio precedente).

18. Sia Σ_g la superficie compatta connessa orientabile di genere g. Si mostri che esiste un omomorfismo surgettivo $\varphi\colon \pi_1(\Sigma_g) \to F_g$, dove F_g è il gruppo libero generato da g lettere. (Suggerimento: si parta dalla presentazione di $\pi_1(\Sigma_g)$ descritta a lezione).

19. Sia Σ_g la superficie compatta connessa orientabile di genere g. Per quali g il gruppo fondamentale di Σ_g è abeliano? (Si sfrutti l'esercizio precedente).

20. Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento connesso, e siano $\widetilde{x} \in E$, $x = p(\widetilde{x}) \in X$. Abbiamo mostrato a lezione che, se p è regolare, allora $\mathrm{Aut}(E) \cong \pi_1(X, x)/p_*(\pi_1(E, \widetilde{x}))$. Questo esercizio estende questo risultato a rivestimenti non necessariamente regolari.

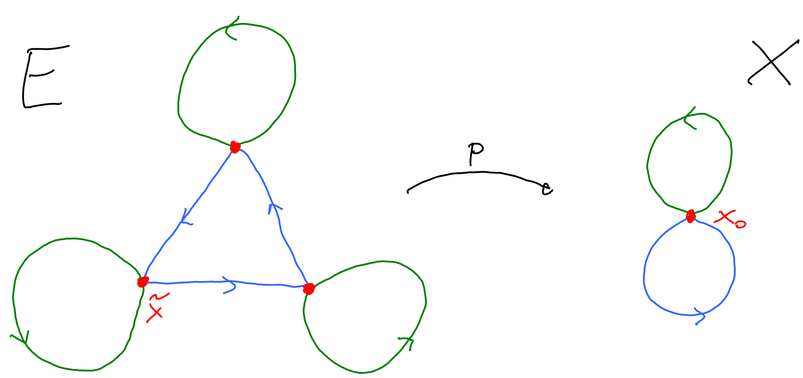
Sia $N = \mathrm{Norm}(p_*(\pi_1(E, \widetilde{x})))$ il normalizzatore di $p_*(\pi_1(E, \widetilde{x}))$ in $\pi_1(X, x)$.

(1) Si mostri che, se $\alpha \in N$, allora esiste un unico automorfismo $\varphi(\alpha) \in \mathrm{Aut}(E)$ tale che $\varphi(\widetilde{x}) = \widetilde{x} \cdot \alpha$.

(2) Si mostri che la mappa $\varphi\colon N \to \mathrm{Aut}(E)$ è un omomorfismo di gruppi surgettivo.
(3) Si mostri che $\mathrm{Aut}(E) \cong N/p_*(\pi_1(E, \widetilde{x}))$.

21. Sia $X = S^1 \vee S^1$, sia x_0 il punto di X nel quale le due copie di S^1 si incontrano, siano a, b i generatori di $\pi_1(X, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ corrispondenti ai generatori del gruppo fondamentale di ciascuna copia di S^1, e sia $\varphi\colon \pi_1(X) \to \mathbb{Z}/(3\mathbb{Z})$ l'omomorfismo tale che $\varphi(a) = 1$, $\varphi(b) = 0$. Sia infine E il rivestimento associato a $\ker\varphi$, cioè sia $p\colon E \to X$ un rivestimento con $\widetilde{x} \in p^{-1}(E)$ e $p_*(\pi_1(E, \widetilde{x})) = \ker\varphi$.

(1) Si dica se p è regolare.
(2) Si calcoli il grado di p.
(3) Sia γ un laccio basato in x_0 che rappresenta a, e sia $\widetilde{\gamma}$ il sollevamento di γ a partire da $\widetilde{x}$. Il cammino $\widetilde{\gamma}$ è un laccio?
(4) Sia γ un laccio basato in x_0 che rappresenta a^n, e sia $\widetilde{\gamma}$ il sollevamento di γ a partire da $\widetilde{x}$. Per quali n il cammino $\widetilde{\gamma}$ è un laccio?
(5) Sia γ un laccio basato in x_0 che rappresenta b, e sia $\widetilde{\gamma}$ il sollevamento di γ a partire da $\widetilde{x}$. Il cammino $\widetilde{\gamma}$ è un laccio?
(6) Ci si convinca che la mappa $p\colon E \to X$ è descritta dal disegno qui sotto.



22. Siano X, x_0, a, b come nell'esercizio precedente, e sia $\varphi\colon \pi_1(X) \to \mathbb{Z}/(5\mathbb{Z})$ l'omomorfismo tale che $\varphi(a) = 1$, $\varphi(b) = 0$. Sia infine $p\colon E \to X$ il rivestimento associato a $\ker\varphi$ (si veda l'esercizio precedente). Si disegni E.

23. In questo esercizio diamo una dimostrazione alternativa (e, francamente, più semplice di quella che ho fatto a lezione) del Teorema di Borsuk-Ulam. Per assurdo, sia $f\colon S^2 \to S^1$ una funzione continua tale che $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in S^2$.

(1) Sia $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ il rivestimento universale. Si mostri che esiste $g\colon S^2 \to \mathbb{R}$ continua tale che $p \circ g = f$.

(2) Sia $k\colon S^2 \to \mathbb{R}$ data da $k(x) = g(x) - g(-x)$. Si mostri che esiste $x_0 \in S^2$ con $k(x_0) = 0$ (suggerimento: si usi che S^2 è connesso, e la caratterizzazione dei connessi di $\mathbb{R}$).
(3) Si osservi che $g(x_0) = g(-x_0)$, per cui $f(x_0) = f(-x_0)$, contro le ipotesi.

24. Sia $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ una funzione continua tale che $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in S^2$. Si mostri che esiste $x_0 \in S^2$ tale che $f(x_0) = 0$.

25. (Teorema del panino con prosciutto e formaggio). Siano B, H, C tre insiemi misurabili limitati di $\mathbb{R}^3$ con misura positiva (per svolgere l'esercizio non è necessario sapere cosa ciò vuol dire; si veda sotto). Si supponga inoltre che B sia connesso. Vogliamo dimostrare che esiste un piano affine $P \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che, detti P^+ e P^- i semispazi bordati da P, si abbia che

$$\mu(B \cap P^+) = \mu(B \cap P^-)\ , \quad \mu(H \cap P^+) = \mu(H \cap P^-)\ , \quad \mu(C \cap P^+) = \mu(C \cap P^-)\ ,$$

dove μ indica la misura sopra menzionata. In altre parole, si può secare un panino con prosciutto e formaggio con un piano che divida in parti di volume uguale sia il pane, sia il prosciutto, sia il formaggio.

Useremo il seguente fatto: siano $R > 0$ ed A un aperto limitato misurabile. Allora le funzioni

$$\mu_A^+\colon S^2 \times [-R, R] \to \mathbb{R}\ , \quad \mu_A^+(v,t) = \mu\left(A \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, v\rangle \geq t\}\right)\ ,$$
$$\mu_A^-\colon S^2 \times [-R, R] \to \mathbb{R}\ , \quad \mu_A^-(v,t) = \mu\left(A \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, v\rangle \leq t\}\right)$$

sono continue e $\mu(A) = \mu_A^+(v,t) + \mu_A^-(v,t)$ per ogni $(v,t) \in S^2 \times [-R, R]$. Inoltre, μ_A^+ è debolmente decrescente e μ_A^- è debolmente crescente.

Sia $R > 0$ tale che B, H, C siano interamente contenuti nella palla di centro 0 e raggio R in $\mathbb{R}^3$, e sia $Z \subseteq S^2 \times [-R, R]$ l'insieme dato da $Z = \{(v,t) \mid \mu_B^+(v,t) = \mu_B^-(v,t)\}$.

(1) Si mostri che Z è chiuso in $S^2 \times [-R, R]$, e che la proiezione $\pi\colon Z \to S^2$ sul primo fattore è bigettiva. (Per la surgettività di π, bisogna sfruttare che B è connesso; l'iniettività discende dal fatto che B è aperto, il che implica che, se $\mu_B^+(v_0, t_0) \neq 0$, allora $\mu_B^+(v_0, \cdot)$ è *strettamente* decrescente in un intorno di t_0, e se $\mu_B^-(v_0, t_0) \neq 0$, allora $\mu_B^-(v_0, \cdot)$ è *strettamente* crescente in un intorno di t_0; questi fatti possono essere assunti).
(2) Si mostri che Z è omeomorfo a S^2.
(3) Si mostri che $(v,t) \in Z$ se e solo se $(-v, -t) \in Z$.
(4) Sia $f\colon Z \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(v,t) = (\mu_H^+(v,t) - \mu_H^-(v,t), \mu_C^+(v,t) - \mu_C^-(v,t))\ ,$$

e sia $g = f \circ \pi^{-1}\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$. Si mostri che $g(-x) = -g(x)$ per ogni $x \in S^2$.
(5) Si mostri che esiste $z_0 \in Z$ tale che $f(z_0) = 0$ (si usino il punto precedente e l'Esercizio 24).