Corso di Laurea in Matematica
Geometria 2 – Esercizi

1. Sia B un insieme numerabile, e siano $p, q \in B$, $p \neq q$. Sia $\tau \subseteq \mathcal{P}(B)$ il seguente sottoinsieme delle parti di B: $A \in \tau$ se $A \subseteq B \setminus \{p, q\}$, oppure se $A = B \setminus \{p\}$, $A = B \setminus \{q\}$, $A = B$.

(1) Si dimostri che τ è una topologia su B.
(2) Si esibiscano due sottospazi compatti K_1, K_2 si B tali che $K_1 \cap K_2$ non sia compatto.
(3) Si dica se (B, τ) sia T_1, e se sia T_2.

2. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff, e siano K_1, K_2 sottospazi compatti di X. Si mostri che $K_1 \cap K_2$ è compatto.

3. Sia X uno spazio topologico. Si mostri che X verifica l'assioma di separazione T_3 se e solo se ogni punto di X possiede un sistema fondamentale di intorni chiusi.

4. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff. Si mostri che se $x \in X$ ammette un intorno compatto, allora ammette un sistema fondamentale di intorni compatti.

5. Sia $X = \mathbb{R}^2$, dotato della distanza $d\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ così definita: $d(x, y) = \|x - y\|$ se x, y sono linearmente dipendenti; $d(x, y) = \|x\| + \|y\|$ se x, y sono linearmente indipendenti. (Tale metrica si chiama la metrica della rete ferroviaria francese; sapreste spiegare perché?).

(1) Si dica quali punti di X ammettono un intorno compatto.
(2) Si esibisca un chiuso limitato di $C \subseteq X$ che non è compatto.
(3) Essendo non compatto, C non è totalmente limitato. Si determini esplicitamente un valore $\varepsilon > 0$ in modo che non esista un ricoprimento finito di C con palle di raggio ε.
(4) Si dica se la topologia di X sia più fine, meno fine o non comparabile con la topologia Euclidea.
(5) Al variare di $x \in X$, si determini il numero di componenti connesse di $X \setminus \{x\}$.
(6) Si mostri che, se $f\colon X \to X$ è un omeomorfismo, allora $f(0) = 0$ (suggerimento: si usi il punto precedente).

6. Siano $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^3$ definiti come segue:

$$A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}, \quad B = A \cap \{z = 0\}, \quad C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = z^2\}.$$

Si dimostri che A/B è omeomorfo a C. Si dica se A e C sono omeomorfi.

7. Se X, Y sono spazi topologici, la *topologia unione disgiunta* su $X \sqcup Y$ è la topologia per cui $A \subseteq X \sqcup Y$ è aperto se e solo se lo sono sia $A \cap X$ sia $A \cap Y$ (si dimostra facilmente che quella data è una definizione ben posta).

(1) Si mostri che le inclusioni $i\colon X \to X \sqcup Y$, $j\colon Y \to X \sqcup Y$ sono immersioni topologiche aperte e chiuse.
(2) Si mostri che, se C è una componente connessa di $X \sqcup Y$, allora C è una componente connessa di X oppure una componente connessa di Y.
(3) Si mostri che, se X e Y sono entrambi non vuoti, $X \sqcup Y$ è sconnesso.
(4) Si mostri che $X \sqcup Y$ è compatto se e solo se sia X sia Y sono compatti.

8. Siano X, Y due spazi topologici, e siano $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Denotiamo con $(X, x_0) \vee (Y, y_0)$ il *bouquet* di X e Y (rispetto a x_0, y_0), cioè lo spazio topologico

$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) = (X \sqcup Y)/\{x_0, y_0\} .$$

Nel seguito, considereremo fissati x_0, y_0, e indicheremo $(X, x_0) \vee (Y, y_0)$ semplicemente con $X \vee Y$.

(1) Si mostri che le mappe $i\colon X \to X \vee Y$, $j\colon Y \to X \vee Y$ indotte dalle inclusioni di X, Y in $X \sqcup Y$ sono immersioni topologiche.
(2) Si mostri che $X \vee Y$ è connesso se e solo se sia X sia Y lo sono.
(3) Si mostri che $X \vee Y$ è compatto se e solo se sia X sia Y lo sono.
(4) Si mostri che se X e Y sono T_1, allora $i(X)$ e $j(Y)$ sono chiusi in $X \vee Y$ e le mappe i, j sono chiuse.
(5) Si mostri che se X e Y sono T_2, allora $X \vee Y$ è T_2.
(6) Si mostri che se X e Y sono regolari, allora $X \vee Y$ è regolare.
(7) Si mostri che se X e Y sono normali, allora $X \vee Y$ è normale.
(8) Si mostri con un esempio che se X e Y sono T_4, non è detto che anche $X \vee Y$ lo sia.

9. Sia X uno spazio topologico, sia $x_0 \in X$ e siano Y, Z sottospazi chiusi di X tali che $Y \cup Z = X$ e $Y \cap Z = \{x_0\}$. Si mostri che

$$X \ \cong\ (Y, x_0) \vee (Z, x_0) .$$

10. Si costruiscano due sottoinsiemi A, B di $\mathbb{R}^2$ tali che $A \cup B = \mathbb{R}^2$, $A \cap B = \{0\}$, ma $(A, 0) \vee (B, 0)$ non sia omeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

11. Uno spazio topologico X si dice *omogeneo* se per ogni coppia di punti $x, x' \in X$ esiste un omeomorfismo $f\colon X \to X$ tale che $f(x) = x'$.

(1) Si mostri che S^1 è omogeneo.
(2) Si mostri che S^n è omogeneo per ogni $n \geq 2$ (suggerimento: si sfrutti $O(n+1)$).
(3) Si mostri che $(0, 1)$ è omogeneo.
(4) Si mostri che $[0, 1]$ non è omogeneo.

12. Supponiamo che X, Y siano spazi topologici omogenei (vedi esercizio precedente). Si mostri che $(X, x_0) \vee (Y, y_0)$ non dipende (a meno di omeomorfismo) dalla scelta di x_0 e y_0, e si può perciò denotare con $X \vee Y$. Sfruttando l'esercizio precedente, se ne deduca che è ben definito $S^1 \vee S^1$.

Sia

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 - 2x + y^2)(x^2 + 2x + y^2) = 0\} .$$

Si mostri che $S^1 \vee S^1 \ \cong \ X$.

13. Sia $f\colon X \to Y$ una funzione tra spazi topologici.

(1) Si assuma che Y sia di Hausdorff. Si mostri che, se f è continua, allora il grafico di f è chiuso.
(2) Si supponga che Y sia compatto. Si mostri che la proiezione $\pi\colon X \times Y \to X$ sul primo fattore è chiusa.
(3) Si supponda che Y sia compatto e di Hausdorff. Si mostri che f è continua se e solo se il grafico di f è chiuso.

14. Sia X uno spazio topologico. La *sospensione* $S(X)$ di X è definita come segue: posto $Y = X \times [-1, 1]$ (dotato della topologia prodotto) e $(x, t) \sim (y, s)$ se e solo se $(x, t) = (y, s)$, oppure $t = s = -1$, oppure $t = s = 1$, si definisce

$$S(X) = Y/\sim \ .$$

(1) Si mostri che $S(X)$ è connesso.
(2) Si mostri che $S(X)$ è compatto se e solo se X è compatto.
(3) Si mostri che, se X è T_2, allora $S(X)$ è T_2.
(4) Si mostri che $S(S^n) = S^{n+1}$.

15. Sia X uno spazio topologico. Il *cono* $C(X)$ di X è definito come segue: posto $Y = X \times [0, 1]$ (dotato della topologia prodotto) si pone

$$C(X) = Y/(X \times \{0\}) .$$

Inoltre, se $A \subseteq \mathbb{R}^n$, definiamo $C'(A) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ponendo

$$C'(A) = \{(ta, 1 - t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid a \in A,\, t \in [0, 1]\} .$$

(1) Si mostri che $C(X)$ è connesso.
(2) Si mostri che $C(X)$ è compatto se e solo se X è compatto.
(3) Si mostri che, se $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è compatto, allora $C(A)$ è omeomorfo a $C'(A)$.
(4) Si esibisca un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ per cui $C(A)$ e $C'(A)$ non siano omeomorfi.

16. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$, $f(x, y) = ((\cos 2\pi x, \sin 2\pi x), (\cos 2\pi y, \sin 2\pi y))$. Per ogni $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, sia $r_a \subseteq \mathbb{R}^2$ la retta di equazione $y = ax$. Si determini:

(1) Per quali valori di a l'insieme $f(r_a)$ è denso in $S^1 \times S^1$.
(2) Per quali valori di a il sottospazio $f(r_a) \subseteq S^1 \times S^1$ è compatto.

17. Siano $r_1, r_2 \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ due rette proiettive distinte.

(1) Si dica se $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus r_1$ sia connesso.
(2) Si dica se $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus (r_1 \cup r_2)$ sia connesso.

18. Sia X uno spazio topologico metrizzabile separabile, e sia $D \subseteq X$ un sottoinsieme discreto (non necessariamente chiuso). Si mostri che D è al più numerabile.

19. Sia $X = \mathbb{R} \times \{-1, 1\}$ dato da due copie di $\mathbb{R}$, consideriamo la relazione di equivalenza su X data da $(x, t) \sim (y, s)$ se e solo se $(x, t) = (y, s)$ oppure $x = y$ e $x \neq 0$, $y \neq 0$. Sia $Y = X/\sim$.

(1) Si mostri che ogni punto di Y ha un intorno aperto omeomorfo a $(-1, 1)$.
(2) Si dica se Y è T_1.
(3) Si dica se Y è T_2.

20. Sia X uno spazio di Hausdorff compatto, e sia C_n, $n \in \mathbb{N}$, una famiglia di chiusi non vuoti tali che $C_{n+1} \subseteq C_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia $C_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$.

(1) Si mostri che se C_n è connesso per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora C_∞ è connesso.
(2) È vero che se C_n è connesso per archi per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora C_∞ è connesso per archi?

21. Sia X uno spazio topologico connesso, e sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione localmente costante, ovvero supponiamo che per ogni $p \in X$ esista un intorno U_p di p in X tale che $f|_{U_p}$ sia costante. Si mostri che f è costante.

22. Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento di uno spazio metrico X. Si dice che $\mathcal{U}$ ha *numero di Lebesgue* $\varepsilon > 0$ se ogni palla in X di raggio ε è contenuta in un elemento di $\mathcal{U}$.

(1) Si esibisca un ricoprimento aperto di $\mathbb{R}$ che non ammetta un numero di Lebesgue positivo.
(2) Sia X uno spazio metrico compatto, e sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X. Si mostri che $\mathcal{U}$ ammette un numero di Lebesgue $\varepsilon > 0$. (Suggerimento: se così non fosse, esisterebbe una successione $\{x_n\} \subseteq X$ tale che $B(x_n, 1/n)$ non sia contenuto in alcun elemento di $\mathcal{U}$. Si estragga da $\{x_n\}$ una sottosuccessione convergente, e ci si concentri sul punto limite).

23. Sia X_i, $i \in I$ una famiglia di spazi topologici, e per ogni $i \in I$ sia $F_i \subseteq X_i$ un chiuso di X_i. Si mostri che

$$\prod_{i \in I} F_i \subseteq \prod_{i \in I} X_i$$

è un chiuso di $\prod_{i \in I} X_i$.

24. Sia X uno spazio topologico, e sia $Z = X \cup \{\infty\}$, dotato della topologia i cui aperti sono gli aperti di X e l'intero Z. Dato un qualsiasi $x \in X$, si consideri la mappa $\alpha\colon [0,1] \to Z$ data da $\alpha(t) = \infty$ se $t = 0$, $\alpha(t) = x$ se $t > 0$. Si mostri che α è continua, e si deduca che Z è connesso per archi.

25. Sfruttando l'esercizio precedente, si costruisca uno spazio topologico X connesso per archi con $|X| \geq 2$ contenente un aperto U totalmente sconnesso.

26. Sia X uno spazio topologico T_1, connesso per archi e con $|X| \geq 2$, e sia U un aperto di X. Si mostri che U non può essere totalmente sconnesso.

27. Sia $X = \mathbb{R}$, dotato della topologia i cui chiusi sono $\mathbb{R}$ stesso, e i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ aventi cardinalità al più numerabile. Si dica se X sia connesso, connesso per archi, compatto.

28. Sia $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. Si mostri che $X \cong S^1 \times \mathbb{R}$.

29. Sia $X = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1x_2 = x_3x_4\}$. Quante componenti connesse ha $\mathbb{R}^4 \setminus X$?