ANNO ACCADEMICO 2008/2009
Geometria Superiore II
Esercizi IV

Esercizio 1.
Sia X uno spazio geodetico iperbolico proprio con punto base $w \in X$, e siano $c_n\colon [0,\infty) \to X$, $n \in \mathbb{N}$, $c\colon [0,\infty) \to X$ raggi geodetici con $c_n(0) = c(0) = w$. Si mostri che $\lim_{n\to\infty} c_n(\infty) = c(\infty)$ se e solo se da ogni sottosuccessione di $\{c_n\}$ si può estrarre una sottosuccessione $\{c_{n_i}\}$ tale che $\lim_{i\to\infty} c_{n_i} = c'$ nella topologia della convergenza uniforme sui compatti, dove c' è un raggio geodetico con $c'(\infty) = c(\infty)$.

Esercizio 2.
Sia X uno spazio geodetico δ-iperbolico proprio, e sia $\Delta \subseteq X$ un triangolo di vertici w, x, y. Siano u_1, u_2, u_3 i *punti interni* di Δ opposti a y, x, w rispettivamente (ricordo che, se T è il tripode associato a Δ, i punti interni di Δ sono dati dalla preiimmagine del centro rispetto alla mappa di confronto $\Delta \to T$).

- Si mostri che esiste $A = A(M,\delta)$ tale che se $a_1 \in [w,x]$, $a_2 \in [w,y]$, $a_3 \in [x,y]$ sono tali che $\mathrm{diam}(\{a_1,a_2,a_3\}) \leq M$, allora $d(a_i,u_i) \leq A$ per ogni $i = 1,2,3$.

Sia ora Y uno spazio geodetico δ-iperbolico proprio, e sia $f\colon X \to Y$ una (λ,c)-quasi-isometria.

- Si mostri che, se Δ' è un triangolo in Y di vertici $f(w), f(x), f(y)$ e punti interni $v_1 \in [f(w),f(x)]$, $v_2 \in [f(w),f(y)]$, $v_3 \in [f(x),f(y)]$, allora esiste $B = B(\delta,\lambda,c)$ tale che $d(f(u_i),v_i) \leq B$ per $i = 1,2,3$ (Suggerimento: si usino il Lemma di Morse ed il punto precedente).
- Si mostri che esiste una costante $C = C(\lambda,c,\delta)$ tale che per ogni quaterna di punti $x,y,z,w \in X$ si ha
$$\begin{aligned} \tfrac{|(x,y)_w-(y,z)_w|}{\lambda} - C &\leq \left|(f(x),f(y))_{f(w)} - (f(y),f(z))_{f(w)}\right| \\ &\leq \lambda\,|(x,y)_w - (y,z)_w| + C. \end{aligned}$$

Esercizio 3.
Sia $g\colon A \to B$ un omeomorfismo tra spazi metrici, e per ogni $a \in A$ sia
$$K(a) = \limsup_{r\to 0^+} \frac{\sup\{d(g(a), g(a')) \mid d(a,a') = r\}}{\inf\{d(g(a), g(a')) \mid d(a,a') = r\}} \in [1, +\infty].$$
Allora, g è detto K-*quasi-conforme* se per ogni $a \in A$ si ha $K(a) \leq K$.

(1) Si mostri che, se X è uno spazio geodetico iperbolico proprio, allora le metriche costruite a lezione su ∂X sono a dua a due quasi-conformemente equivalenti (ovvero, se d, d' sono due tali metriche, allora l'identità definisce un omeomorfismo quasi-conforme di $(\partial X, d)$ su $(\partial X, d')$).

(2) Sia $f\colon X \to Y$ una quasi-isometria tra due spazi geodetici iperbolici propri. Si mostri che l'omeomorfismo indotto $\partial f\colon \partial X \to \partial Y$ è quasi-conforme (tale affermazione ha senso per il punto precedente). (Suggerimento: si usi l'Esercizio precedente).

Esercizio 4.
Sia Γ un gruppo iperbolico, e sia T un cono asintotico di (un grafo di Cayley di) Γ (che, per quanto visto a lezione, è un albero reale). Si mostri che per ogni p in T la cardinalità delle componenti connesse di $T \setminus \{p\}$ è maggiore o uguale a quella di ∂X (per esempio, se Γ è il gruppo fondamentale di una superficie di genere almeno 2, allora $\partial\Gamma \cong S^1$, per cui T è sconnesso da ogni suo punto in una quantità più che numerabile di componenti!).