**ANNO ACCADEMICO 2008/2009**
**Geometria Superiore II**
**Esercizi I**

**Esercizio 1.**
Sia $(X, d)$ uno spazio metrico di lunghezze connesso, e sia $p \colon \widetilde{X} \to X$ un rivestimento, con $\widetilde{X}$ connesso. Si mostri che esiste un'unica distanza $\widetilde{d}$ su $\widetilde{X}$ tale che $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ sia una metrica di lunghezze, e $p$ sia una locale isometria. (Suggerimento: si ponga $\widetilde{d}(x, y)$ uguale all'inf delle lunghezze delle proiezioni dei cammini che congiungono $x$ con $y$ in $\widetilde{X}$.)

(1) Si mostri che $(X, d)$ è completo se e solo se $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ è completo.
(2) Si mostri che ogni automorfismo di rivestimento di $p \colon \widetilde{X} \to X$ è un'isometria rispetto a $\widetilde{d}$.
(3) Sia ora $\widetilde{X}$ il rivestimento *universale* di $X$. Nel caso in cui $X$ sia compatto, si mostri che $\pi_1(X)$ è finitamente generato e quasi-isometrico a $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$.

**Esercizio 2.**
Questo esercizio ha lo scopo di mostrare che un gruppo quasi-isometrico a $\mathbb{Z}$ contiene un sottogruppo di indice finito isomorfo a $\mathbb{Z}$. Sia allora $\Gamma$ un gruppo finitamente generato quasi-isometrico a $\mathbb{Z}$, e siano $\psi \colon \Gamma \to \mathbb{Z}$, $\varphi \colon \mathbb{Z} \to \Gamma$ quasi-isometrie l'una quasi-inversa dell'altra. Senza perdita di generalità, supponiamo anche che si abbia $\psi(1) = 0$, $\varphi(0) = 1$.

(1) Si mostri che esistono costanti $\mu, \lambda$ tali che per ogni $\gamma \in \Gamma$ la mappa $\alpha_\gamma \colon [0, \infty) \cap \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da $t \mapsto \psi(\gamma \cdot \varphi(t))$ è un $(\mu, \lambda)$-embedding quasi-isometrico (dove $\mu, \lambda$ non dipendono da $\gamma$).
(2) Sia $A = \varphi([0, +\infty))$. Si mostri che, a meno di sostituire $\Gamma$ con un suo sottogruppo di indice due, esiste una costante $H \geq 0$ tale che
$$\psi(\gamma \cdot A) \subseteq \mathbb{Z} \cap [\psi(\gamma) - H, \infty).$$
(3) Si mostri che esistono $c \geq 0$ e $\gamma_0 \in \Gamma$ tali che, posto $A' = \{\gamma \in \Gamma \mid d(\gamma, A) \leq c\}$, l'insieme $\gamma_0 \cdot A$ sia strettamente contenuto in $A$. Se ne deduca che tale $\gamma_0$ ha ordine infinito in $\Gamma$.
(4) Si mostri che il sottogruppo generato da $\gamma_0$ ha indice finito in $\Gamma$, onde la tesi.

$*$ **Esercizio 3.**
Si mostri che un embedding quasi isometrico di $\mathbb{Z}^2$ in sé stesso è una quasi-isometria. (Suggerimento: Si sostituisca $\mathbb{Z}^2$ con $\mathbb{R}^2$, e si "approssimi" l'embedding quasi-isometrico con un'opportuna funzione continua $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, che continui ad essere un embedding quasi-isometrico. Si mostri ora che $f$ è surgettiva: per farlo, si prolunghi $f$ alla compattificazione di Alexandrov di $\mathbb{R}^2$, che è omeomorfa a $S^2$. Se tale prolungamento non fosse surgettivo, per il Teorema di Borsuk-Ulam esisterebbero due punti antipodali di $S^2$ con la medesima immagine. Scegliendo opportunamente le identificazioni di $S^2$ con le compattificazioni di Alexandrov di $\mathbb{R}^2$, ciò conduce ad una contraddizione.)

$*$ **Esercizio 4.**
Si dia un esempio di un gruppo finitamente generato $\Gamma$ che ammette un omomorfismo iniettivo e quasi-isometrico $\Gamma \hookrightarrow \Gamma$ che non sia una quasi-isometria.

**Esercizio 5.**
Sia $\Gamma < \mathrm{Sl}(3,\mathbb{Z})$ il sottogruppo delle matrici della forma

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con $a, b, c$ in $\mathbb{Z}$.

- Si mostri che $\Gamma$ è finitamente generato.
- Si determini un omomorfismo iniettivo di gruppi $j\colon \mathbb{Z}^2 \to \Gamma$ che *non* sia un embedding quasi-isometrico.