Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
Analisi Matematica 1 - Foglio di esericizi n.ro 19 del 08/05/20

1. Calcoliamo l'integrale di $\tan x$ per parti, integrando $\sin x$ e derivando $1/\cos x$:

$$\begin{aligned}\int \tan x\, dx &= \int \sin x \frac{1}{\cos x}\, dx = -\cos x \frac{1}{\cos x} - \int (-\cos x)\frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx \\ &= -1 + \int \tan x\, dx\end{aligned}$$

da cui, semplificando, $0 = -1$. Si spieghi l'apparente paradosso.

2. Si calcolino

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,, \qquad \int \frac{x^2}{x^3+1}\, dx\ .$$

(Attenzione: il secondo integrale è molto più semplice del primo. Perché?)

3. Siano $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ tali che $\int_a^b f(x)\, dx$ e $\int_a^b g(x)\, dx$ siano integrali impropri elementari. Dando per buona l'analoga proprietà per integrali propri, si mostri che

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx\ +\ \int_a^b g(x)\, dx\ .$$

(Si intende l'usuale convenzione sulla somma di elementi in $\overline{\mathbb{R}}$: per esempio, se $\int_a^b f(x)\, dx = +\infty$ e $\int_a^b g(x)\, dx = -\infty$, nulla si può dire su $\int_a^b (f(x)+g(x))\, dx$).

4. Sia $f\colon [M,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione crescente. Si mostri che $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ esiste (ed è o un numero reale, o $+\infty$). Suggerimento: si segua la dimostrazione che le successioni monotone ammettono limite.
Abbiamo usato questo risultato per dimostrare che, se $g\colon [M,+\infty)$ è una funzione limitata e definitivamente positiva, allora $\int_M^{+\infty} g(x)\, dx$ esiste (ed è finito o uguale a $+\infty$).

5. Questa dimostrazione è stata fatta in aula con una scelta di segni diversa. Ripercorretela per esercizio come segue. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione limitata ed integrabile secondo Riemann su ogni intervallo chiuso e limitato.

(1) Si mostri che $0 \le |f(x)| - f(x) \le 2|f(x)|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
(2) Sfruttando il punto precedente ed i teoremi di confronto, si mostri che

$$\int_0^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \int_0^{+\infty} (|f(x)| - f(x))\, dx < +\infty\ .$$

(3) Sfruttando l'uguaglianza $f(x) = |f(x)| - (|f(x)| - f(x))$ ed i punti precedenti, si mostri che, se $\int_0^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty$, allora anche $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ esiste ed è finito.

Ciò dimostra il Teorema di convergenza assoluta per gli integrali impropri (almeno nel caso di funzione limitata su un dominio illimitato; gli altri casi sono identici).

6. In questo esercizio si dà una nuova dimostrazione di un risultato fatto a lezione. Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$.

(1) Si mostri che, per ogni $k \in \mathbb{N}$ ed ogni $x \in [\pi/6 + k\pi, (5/6)\pi + k\pi]$, si ha
$$f(x) \geq \frac{1}{2(k+1)\pi} \ .$$

(2) Si mostri che, per ogni $k \in \mathbb{N}$,
$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(x)\, dx \ \geq \ \frac{1}{3(k+1)}$$
(poiché $f \geq 0$, basta osservare che questo integrale è maggiore o uguale all'integrale sull'intervallo $[\pi/6 + k\pi, (5/6)\pi + k\pi]$, per poi usare il punto precedente).

(3) Si usino i punti precedenti per mostrare che
$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = +\infty \ .$$

7. Si discuta la convergenza dei seguenti integrali impropri:
$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x) \sin \frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}\, dx \ , \quad \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x - x^6}}\, dx \ , \quad \int_1^{+\infty} e^{-x} \sin \sqrt{x}\, dx \ .$$

8. A lezione abbiamo dimostrato che $\int_1^{+\infty} \sin x^2\, dx$ converge. Mostriamo ora che tale integrale non converge assolutamente.

(1) Si mostri che, per ogni $k \in \mathbb{N}$ ed ogni $x \in [\sqrt{\pi/6 + k\pi}, \sqrt{(5/6)\pi + k\pi}]$, si ha $f(x) \geq 1/2$.

(2) Se ne deduca che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, posto
$$a_k = \frac{\pi}{3\left(\sqrt{(5/6)\pi + k\pi} + \sqrt{\pi/6 + k\pi}\right)} \ ,$$
si ha
$$\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} f(x)\, dx \ \geq \ \int_{\sqrt{\pi/6+k\pi}}^{\sqrt{(5/6)\pi+k\pi}} f(x)\, dx \ \geq \ \frac{\sqrt{(5/6)\pi + k\pi} - \sqrt{\pi/6 + k\pi}}{2} \ = \ a_k \ .$$

(3) Sfruttando il punto precedente, si mostri che
$$\int_0^{\sqrt{k\pi}} f(x)\, dx \ \geq \ \sum_{i=0}^{k-1} a_i \ .$$

(4) Sfruttando il confronto asintotico di a_k con $1/\sqrt{k}$, si concluda che
$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = +\infty \ .$$

9. Siano $a > 0$, $b > 1$. Ispirandosi alle dimostrazioni fatte a lezione, si mostri che gli integrali impropri

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a}\, dx\,, \qquad \int_1^{+\infty} \sin(x^b)\, dx$$

sono convergenti.

10. Sfruttando l'opportuna disuguaglianza tra integrale improprio della funzione $f(x) = 1/x^3$ e serie associata, si dia una stima dell'errore commesso nell'approssimare la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$ con la somma finita $\sum_{n=1}^{1000} 1/n^3$.

11. Calcolare $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} k^{-1}$. (Suggerimento: per ogni $n \in \mathbb{N}$, si determinino estremi a_n, b_n e c_n, d_n tali che

$$\int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{x}\, dx \ \le \sum_{k=n}^{2n} k^{-1} \ \le \ \int_{c_n}^{d_n} \frac{1}{x}\, dx\ .$$

Si usino poi le proprietà algebriche del logaritmo ed il Teorema dei Carabinieri per concludere).