Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
Analisi Matematica 1 - Foglio di esericizi n.ro 14 del 22/03/2020

Negli esercizi che seguono ci riferiamo agli sviluppi di Taylor con il resto di Peano.

1. Scrivere lo sviluppo di Taylor al sesto ordine in $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = \sin(x^2) \ ,$$

lo sviluppo di Taylor al secondo ordine in $x_0 = \pi/6$ della funzione

$$f(x) = e^{\sin(x)} \ ,$$

e lo sviluppo di Taylor al secondo ordine in $x_0 = 1/e$ della funzione

$$f(x) = x^x \ .$$

2. Studiare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{xe^{-x^2} - \sin(x) + (5/6)x^3}{(x+2x^2)\log^3(1+x/2)} \ ,$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1+\log(x) - e^{x-1}}{(x-1)^2} \ .$$

3. Determinare, se esiste, il polinomio di Taylor in $x_0 = 0$ non nullo di ordine minimo della funzione

$$f(x) = (2+\cos(3x) - 3\cosh(x))^4 \log(1+x^3) \ .$$

4. Si determini lo sviluppo al terzo ordine in $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = e^x - e^{-x^2} - \sin(x) \ ,$$

al quarto ordine della funzione

$$f(x) = (1+x^2)^{1/3} - e^{2x} \ .$$

Usando solo tali sviluppi, discutere in entrambi i casi se 0 è un punto di massimo o minimo relativo.

5. Al variare del parametro reale a, si calcoli

$$\lim_{x\to 0^+} (\sin(x) - \log(1+x))x^a \ .$$

6. Sia $f(x)$ una funzione tale che per $x \to 0$

$$f(x) = 2 - x^2 + 3x^4 + o(x^4) \ .$$

Studiare

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 2 + x\sin(x)}{x^4} \ .$$

7. Sia $f(x)$ definita da $f(0) = 1$, $f(x) = \sin(x)/x$ se $x \neq 0$. Determinare, se esiste, lo sviluppo di Taylor al quarto ordine di $f(x)$ per $x \to 0$.

8. Si consideri la funzione $f(x) = \sinh(x)$.
(1) Determinare la retta tangente al grafico di f nel punto $(0, f(0))$.
(2) In un intorno di 0, determinare la posizione del grafico di f rispetto alla retta tangente.

9. Stesse domande come nell'esercizio 8, per le funzioni

$$f(x) = \arctan(\sin(x)) \ , \qquad f(x) = \sin(x) + 1/\cos(x) - 1 \ .$$

10. Al variare di $a > 0$, si calcoli

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \sinh x + \sin x - \arctan x}{x^a} \ .$$

11. Si calcolino

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 \left(1 + \log\frac{x+1}{x} - e^{\frac{x+1}{x^2}}\right) \ , \qquad \lim_{n\to\infty} n^2\log(n+1) - n^2 \log n - n \ ,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(e^{x^2} - x\sin x\right)^{\frac{1}{x^4}} \ , \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - \cos x}{(1-\cos x)^2} \ .$$

13. Si calcolino

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}\right) \ , \qquad \lim_{n\to\infty} n^a \left(\sin\frac{1}{n^2} - \sin\frac{1}{n^2+n}\right) \ ,$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \ , \qquad \lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+x} + x \ .$$

16. Al variare di $a > 0$, si calcoli

$$\lim_{n\to\infty} n^a \left(\sqrt{4n+1} + \sqrt{n+1} - 3\sqrt{n}\right) \ .$$